



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA ELEKTROTECHNIKY
A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ**

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION

ÚSTAV RADIOELEKTRONIKY

DEPARTMENT OF RADIO ELECTRONICS

**ANALÝZA A OBVODOVÉ REALIZACE SPECIÁLNÍCH
CHAOTICKÝCH SYSTÉMŮ**

ANALYSIS AND CIRCUIT REALIZATION OF SPECIAL CHAOTIC SYSTEMS

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Miroslav Rujzl

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Jiří Petržela, Ph.D.

BRNO 2021

Diplomová práce

magisterský navazující studijní program **Elektronika a komunikační technologie**

Ústav radioelektroniky

Student: Bc. Miroslav Rujzl

ID: 196809

Ročník: 2

Akademický rok: 2020/21

NÁZEV TÉMATU:

Analýza a obvodové realizace speciálních chaotických systémů

POKYNY PRO VYPRACOVÁNÍ:

Seznamte se s matematickými modely jednoduchých autonomních deterministických dynamických systémů generujících chaos a možnostmi jejich numerické analýzy. Dále prostudujte principy obvodové syntézy těchto systémů. U vybraných RF funkčních bloků vykazujících chaotické řešení navrhnete obvodovou strukturu vhodnou k realizaci a experimentální verifikaci. Existenci strukturálně stabilních podivných atraktorů dokažte laboratorním měřením.

K naměřených oscilogramům vypočtete bifurkační diagramy a specifikujte, pro jaké hodnoty parametrů jsou analyzované systémy chaotické. Pro hodnoty parametrů odpovídající "maximálně chaotickému" toku definujte oblasti přitažlivosti jednotlivých stavových atraktorů.

DOPORUČENÁ LITERATURA:

[1] PETRZELA, Jiri. Strange Attractors Generated by Multiple-Valued Static Memory Cell with Polynomial Approximation of Resonant Tunneling Diodes. Entropy [online]. 2018, 20(9) [cit. 2020-05-15]. DOI: 10.3390/e20090697. ISSN 1099-4300.

[2] ITOH, MAKOTO. SYNTHESIS OF ELECTRONIC CIRCUITS FOR SIMULATING NONLINEAR DYNAMICS. International Journal of Bifurcation and Chaos [online]. 2011, 11(03), 605-653 [cit. 2020-05-15]. DOI: 10.1142/S0218127401002341. ISSN 0218-1274.

Termín zadání: 8.2.2021

Termín odevzdání: 20.5.2021

Vedoucí práce: doc. Ing. Jiří Petřela, Ph.D.

prof. Ing. Tomáš Kratochvíl, Ph.D.
předseda rady studijního programu

UPOZORNĚNÍ:

Autor diplomové práce nesmí při vytváření diplomové práce porušit autorská práva třetích osob, zejména nesmí zasahovat nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a musí si být plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č.40/2009 Sb.

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá analýzou elektronických dynamických systémů vykazujících chaotické řešení. V úvodní části jsou vysvětleny některé základní pojmy pro lepší pochopení dynamických systémů a jsou diskutovány aktuální poznatky ze světa obvodů vykazujících chaotické řešení. Nejznámější chaotické systémy jsou podrobeny numerické analýze v prostředí Matlab. Numerická analýza a experimentální ověření bylo provedeno u obvodu tranzistorového zesilovače pracujícího ve třídě C, u kterého se potvrdilo chaotické chování a generování podivného atraktoru.

Klíčová slova

Dynamický systém, chaos, chaotický systém, Chua oscilátor, tranzistorový zesilovač ve třídě C

Abstract

This master's thesis deals with analysis of electronic dynamical systems exhibiting chaotic solution. In introduction, some basic concepts for better understanding of dynamical systems are explained. After introduction, current knowledge from the world of circuits exhibiting chaotic solutions are discussed. The best-known chaotic systems are analyzed numerically in Matlab software. Numerical analysis and experimental verification were demonstrated at C class transistor amplifier, which confirmed the chaotic behavior and generation of a strange attractor.

Keywords

Dynamical system, chaos, chaotic system, Chua circuit, transistor amplifier in C class

Bibliografická citace:

RUIJZL, Miroslav. *Analýza a obvodové realizace speciálních chaotických systémů* [online]. Brno, 2021 [cit. 2021-05-20]. Dostupné z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/133611>. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav radioelektroniky. Vedoucí práce Jiří Petržela.

Prohlášení

„Prohlašuji, že svou diplomovou práci na téma Analýza a obvodové realizace speciálních chaotických systémů jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucí/ho diplomová práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené diplomové práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této diplomové práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.

V Brně dne: **20. května 2021**

Miroslav Rujzl
podpis autora

Poděkování

Děkuji vedoucímu diplomové práce doc. Ing. Jiřímu Petrželovi, Ph.D. za účinnou metodickou, pedagogickou a odbornou pomoc a další cenné rady při zpracování mé diplomové práce.

V Brně dne: **20. května 2021**

Miroslav Rujzl
podpis autora

Obsah

1.	Úvod.....	13
2.	Dynamické systémy	14
2.1	Dělení dynamických systémů	15
2.2	Atraktor	16
3.	Chaotické systémy	17
3.1	Analýza chaotických systémů	18
3.1.1	Poincarého sekce.....	18
3.1.2	Bifurkační diagram	19
3.1.3	Oblast přitažlivosti atraktoru	20
3.1.4	Ljapunovovy exponenty	20
4.	Klasické chaotické systémy	22
4.1	Lorenzův systém	22
4.2	Chua oscilátor.....	23
5.	Chaotický zesilovač ve třídě C.....	28
5.1	Simulační model tranzistorového stupně	28
5.2	Analýza z hlediska maximálního chaosu	30
5.3	Analýza oblastí přitažlivosti.....	40
5.4	Analýza bifurkačních diagramů	44
6.	Integratorový model	48
7.	Závěr	51

Seznam symbolů a zkratek

PWL	...	Piecewise-linear function
OZ	...	Operační zesilovač
DR	...	Diferenciální rovnice
RF	...	Rádiová frekvence
LLE	...	Largest Lyapunov Exponent

Symboly:

x, y, z	...	stavové proměnné	[-]
u	...	elektrické napětí	[V]
i	...	elektrický proud	[A]
R	...	elektrický odpor	[Ω]
L	...	indukčnost	[H]
C	...	kapacita	[F]
Y	...	admitance	[S]

Seznam obrázků

Obrázek 1 – Sériový rezonanční obvod	15
Obrázek 2 - Poincarého sekce při konstantní hodnotě $y = 0$ ve stavovém prostoru simulovaného tranzistorového zesilovače	19
Obrázek 3 - Bifurkační diagram jednorozměrné logistické funkce	20
Obrázek 4 – Model divergentního dvourozměrného systému (exponent λ_1 bude kladný)	21
Obrázek 5 - Lorenzův atraktor při hodnotách $\sigma = 10$, $b = 8/3$ a $r = 28$	23
Obrázek 6 – Schéma Chuova obvodu	24
Obrázek 7 – Závislost třísegmentové PWL funkce na napětí u_{C1}	24
Obrázek 8 – Schéma Chuova obvodu s reálnými prvky.....	25
Obrázek 9 - Double-scroll atraktor pro hodnotu $R_I = 1970 \Omega$	26
Obrázek 10 – Atraktor při použití kubické funkce pro hodnoty $h_1 = -0,599 \cdot 10^{-3}$, $h_2 = 0,0218 \cdot 10^{-3}$	27
Obrázek 11 - Tranzistorový zesilovač ve třídě C.....	28
Obrázek 12 - Ekvivalentní obvodový model tranzistorového zesilovače ve třídě C	28
Obrázek 13 - Ekvivalentní model tranzistorového stupně s aktivními prvky pro případ č. 3.....	30
Obrázek 14 - Grafické vyjádření LLE pro případ 1 a 2.....	31
Obrázek 15 - Grafické vyjádření LLE pro případ 3 a 4.....	31
Obrázek 16 - Grafické vyjádření LLE pro případ 5 a 6.....	31
Obrázek 17 - Atraktor tranzistorového zesilovače pro případ č. 1 při maximálním LLE ($y_{11} = 0,56$; $y_{21} = 1$; $b = 2,6$; $d = -1,9$, $a = c = e = 0$; LLE = 0,109)	32
Obrázek 18 - Atraktor tranzistorového zesilovače pro případ č. 2 při maximálním LLE ($y_{11} = 0,5$; $y_{21} = 1$; $c = 5,02$; $e = -3,34$, $a = b = d = 0$; LLE = 0,203)	33
Obrázek 19 - Atraktor tranzistorového zesilovače pro případ č. 2 při hodnotách $y_{11} = 0,5$; $y_{21} = 1$; $c = 3,06$; $e = -1,23$, $a = b = d = 0$; LLE = 0,192.....	33
Obrázek 20 - Atraktor tranzistorového zesilovače pro případ č. 2 při hodnotách $y_{11} = 0,5$; $y_{21} = 1$; $c = 6,58$; $e = -6,6$, $a = b = d = 0$; LLE = 0,197.....	34
Obrázek 21 - Atraktor tranzistorového zesilovače pro případ č. 3 při maximálním LLE ($y_{11} = 0,3$; $y_{21} = 1$; $a = 4,18$; $c = -4,46$, $b = d = e = 0$; LLE = 0,0485)	35

Obrázek 22 - Atraktor tranzistorového zesilovače pro případ č. 3 v prvním pásmu při hodnotách $y_{11} = 0,3$; $y_{21} = 1$; $a = 3,34$; $c = -5,59$, $b = d = e = 0$; LLE = 0,0456	35
Obrázek 23 - Atraktor tranzistorového zesilovače pro případ č. 3 ve čtvrtém pásmu při hodnotách $y_{11} = 0,3$; $y_{21} = 1$; $a = 5$; $c = -2$, $b = d = e = 0$; LLE = 0,0325 [26]	36
Obrázek 24 - Atraktor tranzistorového zesilovače pro případ č. 4 při maximálním LLE ($y_{11} = 0,4$; $y_{21} = 1$; $b = 2,49$; $d = -1,51$, $a = c = e = 0$; LLE = 0,060)	36
Obrázek 25 - Atraktor tranzistorového zesilovače pro případ č. 5 při maximálním LLE ($y_{11} = 0,4$; $y_{21} = 1$; $c = 5,17$; $e = -2,35$, $a = b = d = 0$; LLE = 0,149)	37
Obrázek 26 - Atraktor tranzistorového zesilovače pro případ č. 5 při hodnotách $y_{11} = 0,4$; $y_{21} = 1$; $c = 5,17$; $e = -2,35$, $a = b = d = 0$; LLE = 0,118	38
Obrázek 27 - Atraktor tranzistorového zesilovače pro případ č. 5 při hodnotách $y_{11} = 0,4$; $y_{21} = 1$; $c = 6,86$; $e = -6,01$, $a = b = d = 0$; LLE = 0,122	38
Obrázek 28 - Atraktor tranzistorového zesilovače pro případ č. 5 při hodnotách $y_{11} = 0,4$; $y_{21} = 1$; $c = 6,01$; $e = -3,2$, $a = b = d = 0$; LLE = 0,122	39
Obrázek 29 - Atraktor tranzistorového zesilovače pro případ č. 6 při maximálním LLE ($y_{11} = 0,58$; $y_{21} = 1,3$; $a = 1,51$; $e = -0,66$, $b = c = d = 0$; LLE = 0,127)	39
Obrázek 30 - Atraktor tranzistorového zesilovače pro případ č. 6 při hodnotách $y_{11} = 0,58$; $y_{21} = 1,3$; $a = 1,51$; $e = -4,46$, $b = c = d = 0$; LLE = 0,115	40
Obrázek 31 - Oblast přitažlivosti atraktoru případu č. 1 při maximálním LLE (oblast s podivným atraktorem vyznačena žlutě).....	41
Obrázek 32 - Oblast přitažlivosti atraktoru případu č. 2 při maximálním LLE (oblast s podivným atraktorem vyznačena žlutě).....	41
Obrázek 33 - Oblast přitažlivosti atraktoru případu č. 3 při maximálním LLE (oblast s podivným atraktorem vyznačena žlutě).....	42
Obrázek 34 - Oblast přitažlivosti atraktoru případu č. 4 při maximálním LLE (oblast s podivným atraktorem vyznačena žlutě).....	42
Obrázek 35 - Oblast přitažlivosti atraktoru případu č. 5 při maximálním LLE (oblast s podivným atraktorem vyznačena žlutě).....	43
Obrázek 36 - Oblast přitažlivosti atraktoru případu č. 6 při maximálním LLE (oblast s podivným atraktorem vyznačena žlutě).....	43
Obrázek 37 - Bifurkační diagram případu č. 1 s konstatním parametrem $d = -1,9$..	44
Obrázek 38 - Bifurkační diagram případu č. 2 s konstatním parametrem $e = -3,34$.	45

Obrázek 39 - Bifurkační diagram případu č. 3 s konstatním parametrem $c = -4,46$.	45
Obrázek 40 - Bifurkační diagram případu č. 4 s konstatním parametrem $d = -1,51$	46
Obrázek 41 - Bifurkační diagram případu č. 5 s konstatním parametrem $e = -2,35$.	46
Obrázek 42 - Bifurkační diagram případu č. 6 s konstatním parametrem $e = -0,66$.	47
Obrázek 43 - Schéma integrátorového modelu tranzistorového zesilovače	49
Obrázek 44 - Integrátorový model zesilovače	49
Obrázek 45 - Měřené atraktory generované experimentálním obvodem.....	50

Seznam tabulek

Tab 3-1 - Klasifikace atraktorů dle l'apunovových exponentů v trojrozměrném systému [6].....	21
Tab 5-1 - Hodnoty parametrů zpětné přenosové admitance převzatých z [26]	29
Tab 5-2 - Hodnoty parametrů zpětné přenosové admitance při maximální hodnotě LLE	32

1. ÚVOD

Chaosem nejčastěji označujeme stav, kdy se chování nějakého systému jeví jako zcela náhodné a neuspořádané. Příkladem takového chování může být např. Brownův pohyb nebo obyčejný šum. Pokud však na chaos nahlížíme z matematicko-fyzikálního hlediska, mluvíme o tzv. deterministickém chaosu. Aktuální stav takového systému se sice stále jeví jako náhodný, ale v jeho fyzikálním popisu neexistuje žádný náhodný prvek. Dynamickým systémům, které vykazují deterministický chaos se věnuje matematická disciplína, známá jako teorie chaosu. V této práci je aplikována teorie chaosu na elektronické obvody, ve kterých v současné době probíhá velmi aktivní výzkum chaotického chování.

Úvodní část popisuje některé základní pojmy o dynamických systémech obecně. Následující část se již věnuje přímo chaotickým systémům, současným elektronickým obvodům vykazujícím chaotické chování a jejich případné praktické aplikaci. Pro přiblížení problematiky jsou součástí kapitoly o chaotických systémech také rozbory a numerické analýzy dvou nejznámějších chaotických systémů – Lorenzova systému a Chuova obvodu. Následně se práce věnuje především obvodu klasického tranzistorového zesilovače ve třídě C spadajícího do oblasti RF obvodů, u kterého byla v nedávné době zjištěna možnost uvést obvod do chaotického stavu. Analyzováno je šest různých případů, při kterých dochází ke vzniku podivných atraktorů. Vztažným bodem pro analýzu jednotlivých případů jsou stavy s maximálně chaotickým chováním určované pomocí spektra Ljapunovových exponentů. Maximálně chaotické stavy jsou také analyzovány pomocí grafických vyjádření oblastí přitažlivost a pomocí bifurkačních diagramů. Pro experimentální ověření byla vytvořena testovací deska simulující chování tranzistorového zesilovače pomocí integrátorů z operačními zesilovači, která měla za cíl potvrdit chaotické řešení pomocí generace podivných atraktorů.

2. DYNAMICKÉ SYSTÉMY

Pojmem dynamický systém označujeme takový systém, jehož stav se v určitém stavovém prostoru dynamicky mění v čase. Nejpoužívanějším matematickým popisem vývoje dynamického systému jsou soustavy diferenciálních rovnic, nejčastěji ve tvaru 2.1, které popisují změnu prostorových souřadnic stavového vektoru v čase:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = f(\mathbf{x}) \quad (2.1)$$

Stavovým vektorem popisujeme aktuální stav dynamického systému. Tento vektor je popsán lineární kombinací prostorových souřadnic a bázových vektorů podél os souřadného systému:

$$\mathbf{x} = \sum_{n=1}^N x_n \mathbf{i}_n \quad (2.2)$$

kde x_n jsou prostorové souřadnice a \mathbf{i}_n , jsou bázové vektory podél os souřadného systému.

Dynamické systémy zapsané tímto výrazem se označují jako autonomní a deterministické. Autonomním systémem se rozumí systém, jehož stavové proměnné se sice dynamicky mění v čase, ale čas nevystupuje jako jeden z jejich definujících parametrů. Například jednorozměrný systém

$$\frac{dx}{dt} = x(t) + t \quad (2.3)$$

není autonomní, protože čas vystupuje jako jeden z parametrů.

Popis dynamických vlastností systému pomocí diferenciálních rovnic není jediným používaným popisem a liší se v závislosti na typu dynamického systému. Diskrétní dynamické systémy jsou například popisovány diferenčními rovnicemi, u spojitých systémů lze k popisu využít diferenciálních rovnic, frekvenční nebo impulzní charakteristiky či rozložení nulových bodů a pólů.

Obecně se teorie dynamických systémů zabývá analýzou abstraktních matematických systémů definovaných v určitém vektorovém prostoru, nicméně velké množství reálných fyzikálních systémů je možné za pomoci teorie dynamických systémů velice dobře modelovat a analyzovat. Využití teorie lze nalézt v celé řadě aplikací, např. v ekonomii, meteorologii, fyzice a mnoha dalších odvětvích. Velkou skupinou v praxi používaných dynamických systémů jsou elektronické obvody. Tyto obvody lze analyzovat jako je samotné nebo pomocí obvodového modelu analyzovat např. vývoj proudění vzduchu.

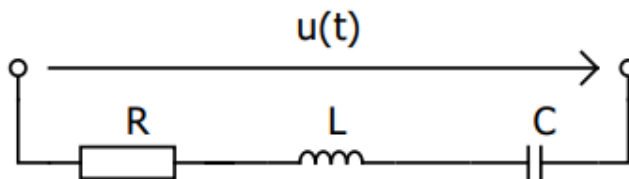
Jednoduchým příkladem elektronického dynamického systému může být například sériový rezonanční obvod na obr. 1. Napěťové poměry celého obvodu lze zapsat diferenciální rovnicí jako:

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt + u_C(t_0) = u(t) \quad (2.4)$$

kterou lze derivací proudu upravit na diferenciální rovnici druhého řádu:

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = 0 \quad (2.5)$$

kde R , L , C tvoří odpor, indukčnost a kapacitu prvků a $u(t)$, $i(t)$ jsou napětí a proud daného obvodu.



Obrázek 1 – Sériový rezonanční obvod

2.1 Dělení dynamických systémů

Dynamické systémy lze dělit podle různých kritérií:

- Podle spojitosti časové souřadnice:
 - **Spojité** – časová souřadnice je množinou reálných čísel, systém je popsán soustavou diferenciálních rovnic
 - **Diskrétní** – časová souřadnice je množinou celých čísel, systém se popisuje soustavou diferenčních rovnic
- Podle popsitelnosti:
 - **Deterministické** – jsou plně popsitelné diferenciálními nebo diferenčními rovnicemi, jejich následující stav lze do jisté míry předvídat
 - **Stochastické** – stav systému je náhodný a nepředvídatelný, popsitelný pomocí statistických veličin
- Podle linearity:
 - **Lineární** – platí princip superpozice, vzniklé atraktory jsou pouze jednoduché (např. pevný bod)
 - **Nelineární** – princip superpozice je neplatný, možnost existence několika atraktorů značné geometrické složitosti
- Podle typu stavového prostoru:
 - **Systém v konečném stavovém prostoru** – systém má konečné množství stavů, např. hod kostkou
 - **Systém ve spočitatelném stavovém prostoru** – systém má nekonečné množství stavů, které však tvoří množinu celých kladných čísel, např. stav elektronu v ohraničeném prostoru
 - **Systém v nekonečném stavovém prostoru** – stavový prostor tvoří množinu reálných čísel, např. volný elektron nabývající jakéhokoliv energetického stavu

2.2 Atraktor

Atraktorem (z lat. *attrahere* – přitahovat) se rozumí stav dynamického systému, do kterého systém směřuje, tj. stav systému v nekonečném čase [3]. Nejedná se přímo o ustálení, protože ustálení je jen jedna z možností, jak se může systém v nekonečném čase chovat. Často se také slovem atraktor označuje grafické zobrazení (neboli stavový portrét) stavového prostoru v nekonečnu. Při analýze dynamických systémů je atraktor jedním z důležitých výstupů, který nám dává přehled o vlastnostech systému.

Atraktory lze rozdělit do několika skupin:

- Pevný bod

Nejjednodušší a nejznámější případ atraktoru, kdy se stav systému ustálí v jednom bodě, přičemž nemusí platit, že systém směřuje vždy do jednoho bodu. Poloha bodu závisí na počátečních podmínkách systému.

- Limitní cyklus

Systém obsahuje několik bodů přitažlivosti, mezi kterými systém osciluje. Atraktor má podobu uzavřené křivky. Typickým příkladem limitního cyklu je oscilátor sinusového průběhu, kdy dochází k oscilaci mezi dvěma body.

- Chaotický atraktor

Systém s chaotickým atraktorem má nekonečné množství bodů, do kterých je přitahován. Tento fakt je způsoben velkou citlivostí na počáteční podmínky, tj. malá změna vstupních parametrů způsobuje velkou odezvu na výstupu. I přes nemožnost předpovědět chaotický atraktor je systém zcela deterministicky definovaný.

- Podivný atraktor

Podivný atraktor je specifický a nejzajímavější typ chaotického atraktoru. Jeho chování odpovídá popisu chaotického atraktoru, ale je možné v něm vysledovat určitou pravidelnost. Matematická definice podivného atraktoru zatím neexistuje, díky soběpodobnosti se nejčastěji řadí mezi fraktály.

3. CHAOTICKÉ SYSTÉMY

Chaotické systémy jsou podskupinou dynamických systémů, u kterých je vznik chaotického, resp. podivného atraktoru žádoucím efektem. Systém lze označit jako chaotický, pokud disponuje vysokou citlivostí na počáteční podmínky. Vznik chaosu v dynamickém systému je také podmíněn jeho samotnou strukturou, kdy je v systému pro vznik chaosu potřebné nelineární chování. Pro spojitě systémy platí, že systém musí být trojdimenzionální, tj. popsán aspoň třemi diferenciálními rovnicemi, u diskretních systémů může vzniknout chaos i v jednodimenzionálním prostoru.

Dlouhou dobu se předpokládalo, že chaos se týká pouze určitých systémů. Po publikování Chuova obvodu (viz kapitola 4.2) byla rozvinuta myšlenka, že chaotické řešení mohou obsahovat i dávno známé elektronické systémy, u nichž se výskyt tohoto chování přímo nepředpokládá. Po této úvaze se teorie chaosu z velké části přesunula z matematiky do analýzy elektronických obvodů. Chaotické chování bylo prokázáno u nelineárních obvodů se spínanými kapacitami [8], který lze transformovat do diskretní podoby a modelovat jeho chování logistickými mapami, které stály na počátku zkoumání teorie chaosu. Dle [9] a [10] byl chaos pozorován sledováním bifurkačního diagramu ve spínaných regulátorech a DC-DC měničů. Velkou část obvodů, ve kterých byl identifikován chaos, tvoří obvody zpracovávající RF analogový signál. Dle [11] je možné detekovat chaotické chování ve smyčce fázového závěsu pracující jako demodulátor FM signálu. Při zapojení nelineárního rezistoru lze podle [12] detekovat chaotické chování v klasickém Colpittsově oscilátoru, stejně tak Hartleyův oscilátor byl v [13] uveden do chaotického stavu. V článku [14] je popsán experimentální důkaz chaotického chování v RC oscilátoru založeném na Wienově členu ve zpětné vazbě. Jedním z typů obvodů s chaotickým chováním jsou obvody řízené vnějším signálem. Dle [15] lze chaos pozorovat v RL obvodu s diodou nebo také u obvodu RLC s nelineární indukčností [2]. Práce [2] uvádí analýzu chaotického chování u AD převodníku využívající sigma-delta modulaci.

Velká sekce obvodů s chaotickým chováním jsou filtry, ať už digitální či analogové. Například článek [16] se zabývá uvedením přizpůsobeného filtru do chaotického stavu. Chaotické chování lze také podle [17] pozorovat ve filtrech s konečnou implusní charakteristikou (FIR filtry) i nekonečnou implusní charakteristikou (IIR filtry). Zajímavá aplikace tohoto poznatku je reprezentována v [18], kde pomocí různého chaotického chování obou typů filtrů lze při analýze zjistit, o jaký typ zkoumaného filtru se jedná. U analogových filtrů lze chaos najít například v aktivním filtru topologie KHN dle [19]. Poměrně netradičním způsobem byl chaos prokázán v topologii filtru Sallen-Key s memristorem [20]. Jelikož první experimentální memristor spatřil světlo světa teprve v roce 2008, lze s největší pravděpodobností očekávat velký nárůst experimentů s tímto netradičním prvkem a jeho spojením s generováním chaosu. Jedním z obvodů, u nichž bylo chaotické řešení nalezeno poměrně nedávno, je tranzistorový stupeň zesilovače ve třídě C. Chaotické chování obvodu v článku [21] vykazuje zesilovač v případě, kdy jeho přenosové admitanční parametry y_{12} a y_{21} jsou modelovány jako nelineární funkce závislé na napětích figurujících jako stavové proměnné. Podrobněji se tomuto tématu věnuje kapitola 5.

Jak je patrné, u velkého množství analogových obvodů byla prokázána existence chaotického řešení. Výzkum této oblasti je velmi aktivní a současné poznatky

z praktického výzkumu chaosu naznačují, že v budoucnu by mohlo být chaotické chování nalezeno u drtivé většiny elektronických obvodů.

Praktické aplikace využívající chaos jsou prozatím ve fázi rozvoje vzhledem k dynamickému vývoji tohoto oboru. Jedna z nabízejících se aplikací chaosu se vyskytuje v komunikačních technologiích. Práce [22] se zabývá aplikací chaotického Chuova obvodu jako modulátoru a demodulátoru přenášeného digitálního signálu. Systémy využívající chaotické chování jako modulaci jsou vysoce odolné vůči odposlechu toho signálu, neboť bez znalosti aktuálního stavu chaotického systému se signál podobá šumu. Problém u tohoto řešení však nastává v synchronizaci dvou chaotických oscilátorů, která je vysoce komplikovaná. V souvislosti s jistou nepředvídatelností aktuálního stavu chaotického systému se rozvíjí i kryptografie založená na chaosu [23]. Šifrování dat pomocí generátoru chaosu by bez znalosti aktuálního stavu (stejně jako v případě modulace) bylo téměř dokonalé. Další zajímavou aplikací chaosu se zabývá článek [24], který využívá chaos ke kompresi dat. Tato myšlenka má souvislost s fraktálovou kompresí, neboť chaotické atraktory je možné řadit mezi fraktály. Dle práce [25] lze v budoucnu očekávat využití chaosu i v neurálních sítích.

Je patrné, že teorie chaosu nachází uplatnění v neočekávaných oblastech a s největší pravděpodobností tento trend bude pokračovat.

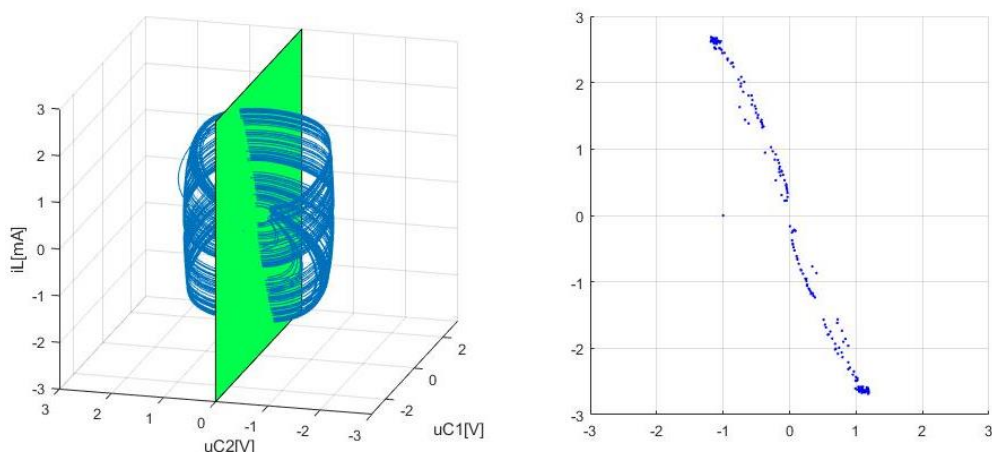
3.1 Analýza chaotických systémů

Jak bylo uvedeno v kapitole 2.2, v současnosti neexistuje přesná matematická definice, která by charakterizovala podivné atraktory. Z tohoto důvodu nelze pouze na základě znalosti atraktoru definovat, zda se systém nachází v chaotickém stavu. V následující části jsou popsány pojmy a klasifikátory z oblasti dynamických systémů, které umožňují lépe rozhodnout o chaotickém chování systému.

3.1.1 Poincarého sekce

Poincarého sekce (známá též jako Poincarého mapa) je prostor, jehož dimenze je menší než dimenze samotného stavového prostoru. Typickým příkladem může být rovina v trojrozměrném systému, kdy dochází k řezu stavového prostoru při konstantní hodnotě jedné stavové proměnné. V tomto případě je dimenze Poincarého sekce menší o jedna a trajektorie stavového vektoru tvoří body umístěné do roviny. Na obr. 2 je konkrétně zobrazen podivný atraktor a jedna Poincarého sekce tranzistorového zesilovače, který je podrobněji rozebrán v kapitole 5. Poincarého sekce zde tvoří množinu bodů podivného atraktoru při hodnotě stavové proměnné $u_2 = 0$ V.

Obecně sekce nemusí být nutně s dimenzí zmenšenou o jedna. V třírozměrném systému lze vytvořit Poincarého sekci ve tvaru přímky, přičemž volíme dvě konstantní hodnoty stavových proměnných. Sekce také nemusí tvořit nutně rovinu nebo přímku, ale např. válcovou plochu či křivku, neboť se stále bude jednat o zobrazení systému do nižší dimenze. V mnohodimenzionálních systémech jsou Poincarého sekce jedinou možností, jak systém pozorovat ve zobrazitelné podobě.



Obrázek 2 - Poincarého sekce při konstantní hodnotě $y = 0$ ve stavovém prostoru simulovaného tranzistorového zesilovače

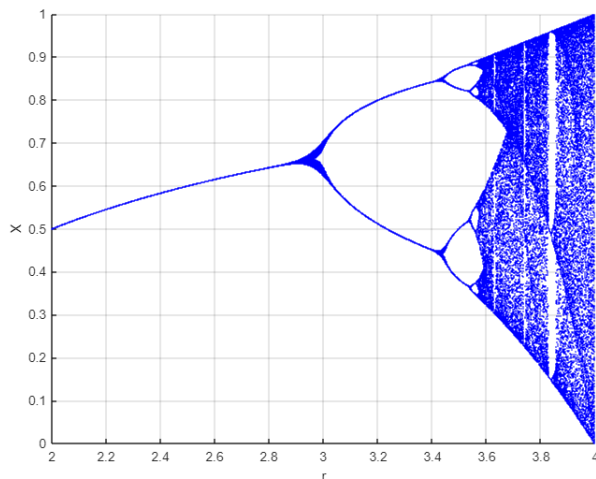
3.1.2 Bifurkační diagram

Bifurkační diagram umožňuje přehledně zobrazit, jakým efektem působí nějaký parametr systému na jeho stav. Svislou osu diagramu tvoří hodnoty z některé uvedených os v Poincarého sekci, vodorovnou osu tvoří hodnoty zvoleného rozmítaného parametru. Do diagramu jsou vynášeny průměty bodů z velkého množství Poincarého sekcí nasnímaných při různých hodnotách zvoleného parametru. Při vhodném nastavení konstantní stavové proměnné a intervalu zvoleného parametru je možné v systému, pozorovat bifurkaci neboli rozdělení vzniklé trajektorie na dva průběhy. Toto rozdělení umožňuje zobrazit přechod z jednoduchého limitního cyklu na zdvojený.

Na obr. 3 je zobrazený bifurkační diagram jednorozměrné logistické funkce, na kterém lze velice dobře pozorovat bifurkační jevy. Diferenční rovnice logistické funkce má tvar

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (3.1)$$

kde r je řídicí parametr a x_n je hodnota stavové proměnné v daném kroku (počáteční podmínka je $x_0 = 0,5$). Atraktorem systému je s nízkou hodnotou řídicího parametru r pevný bod, který mění svou pozici v závislosti na parametru. Při dosažení kritické hodnoty r přechází atraktor do limitního cyklu a dochází k oscilaci mezi dvěma hodnotami. V dalších fázích se limitní cyklus rozšiřuje o další oscilační body. Pokud r dosáhne hodnoty 3,57, systém přejde do chaotického stavu a není možné definovat krajní hodnoty oscilací.



Obrázek 3 - Bifurkační diagram jednorozměrné logistické funkce

3.1.3 Oblast přitažlivosti atraktoru

Chaotické chování dynamického systému nezávisí pouze na jeho vnitřních parametrech, klíčovou roli v uvedení systému do chaosu hrají také počáteční podmínky. Existuje-li chaotický stav pro určité nastavení vnitřních parametrů systému a počátečních podmínek, nemusí chaotické řešení systému nastat pro jiné počáteční podmínky při konstantních vnitřních parametrech. Stavový prostor lze tímto způsobem rozdělit na množiny počátečních podmínek, u kterých atraktorem může být např. pevný bod. Tyto množiny se nazývají oblasti přitažlivosti atraktoru.

3.1.4 Ljapunovovy exponenty

Ljapunovovy exponenty představují nejpoužívanější nástroj pro určení chaotického stavu v dynamických systémech. Význam exponentů lze vysvětlit pomocí modelu nekonečně malé koule, která se svým povrchem dotýká dvou velmi blízkých trajektorií trojdimenzionálního dynamického systému v počátečním čase [7]. Bod dotyku koule s vrcholem stavového vektoru zůstává zachován v čase, čímž se za nějakou dobu koule deformuje do tvaru elipsoidu. Délky poloos tohoto elipsoidu jsou přímo úměrné velikosti Ljapunovových exponentů. Exponenty tudíž vyjadřují, zda trajektorie ve stavovém prostoru divergují nebo konvergují. Zároveň také udávají, s jakou rychlostí k divergenci nebo konvergenci dochází. Matematicky lze Ljapunovův exponent λ vyjádřit jako:

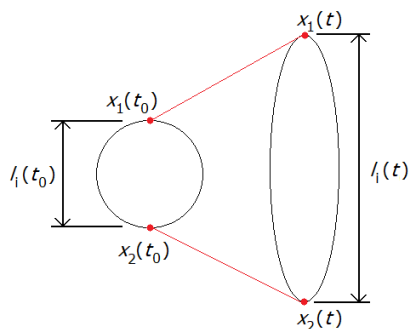
$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{l_i(t)}{l_i(t_0)} \right) \quad (3.2)$$

kde i označuje dimenzi systému, pro kterou je Ljapunovův exponent počítán, l_i je délka poloosy a t , resp. t_0 je čas systému, resp. počáteční čas. Exponenty pro jednotlivé dimenze se nazývají spektrum Ljapunovových exponentů. Pro třídímní systém platí, že spektrum obsahuje tři reálná čísla

Výhodou použití exponentů je jejich jednoznačná reprezentace stavu dynamického systému. Pokud například všechny exponenty systému jsou záporné, dochází ke konvergenci ve všech rozměrech systému, tzn. atraktorem systému je pevný bod. Chaotické chování a generování podivného atraktoru u trojdimenzionálního systému

vzniká v případě, že hodnota prvního ljuvenova exponentu je kladná, druhá je nulová a třetí záporná. Popis možností stavů exponentů je popsán v tab. 3-1.

Výpočet ljuvenovových exponentů nelze provést analytickou cestou, jako řešení se nabízí výpočet pomocí numerických metod. Touto cestou je výpočet exponentů pouze odhadem skutečné hodnoty, neboť numerické metody umožňují pouze přiblížení ke skutečné hodnotě.



Obrázek 4 – Model divergentního dvourozměrného systému (exponent λ_1 bude kladný)

Atraktor	λ_1	λ_2	λ_3
Pevný bod	-	-	-
Limitní cyklus	0	-	-
Torus	0	0	-
Podivný	+	0	-

Tab 3-1 - Klasifikace atraktorů dle ljuvenovových exponentů v trojrozměrném systému [6]

4. KLASICKÉ CHAOTICKÉ SYSTÉMY

4.1 Lorenzův systém

Nejznámějším příkladem chaotického systému je model Edwarda Lorenze z roku 1963. Jedná se o nelineární dynamický systém, který popisuje vynucené proudění vzduchu v atmosféře. Z původních 28 rovnic byl model redukován na tři diferenciální rovnice:

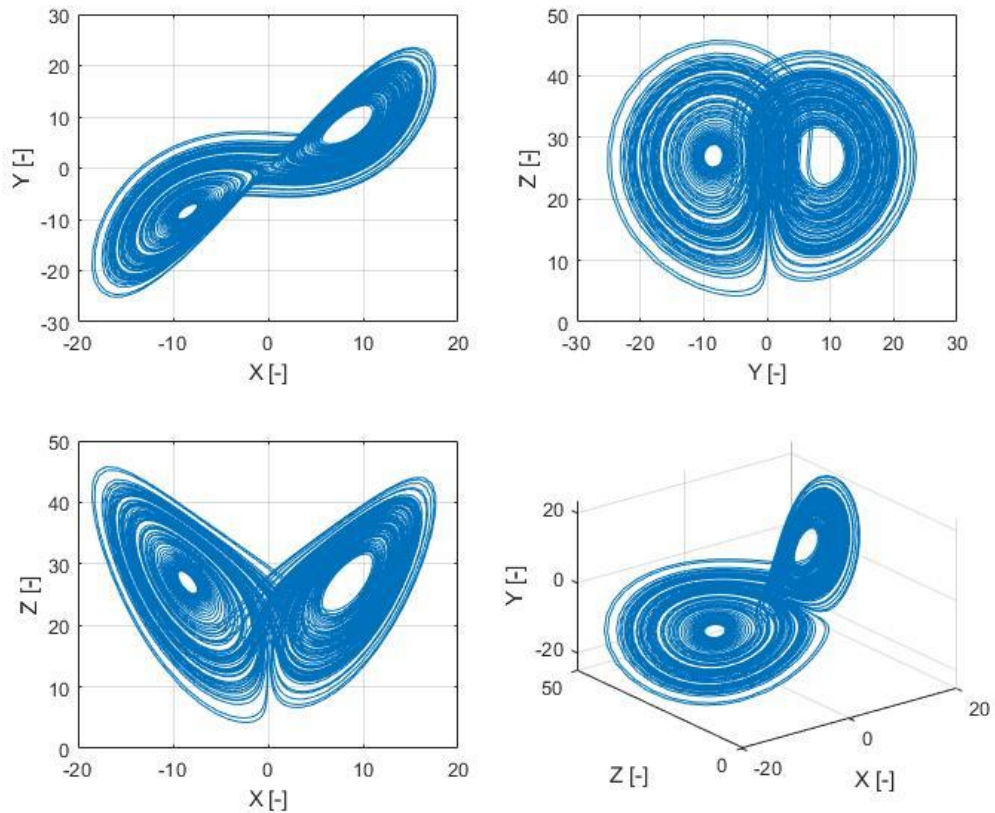
$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \quad (4.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(r - z) - y \quad (4.2)$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz \quad (4.3)$$

kde σ je Prandtlovo číslo vyjadřující převládající přenos tepla, r je redukované Rayleighovo číslo a b je poměr mezi délkou a průměrem válce tekutiny při konvekci. Proměnné x , y , z jsou při modelování systému brány jako prostorové souřadnice, avšak v originální reprezentaci je jejich fyzikální význam jiný [4]. Pro hodnoty $\sigma = 10$, $b = 8/3$ a $r = 28$ dochází v systému ke vzniku chaosu a výsledný atraktor na obr. 2 má vlastnosti podivného atraktoru.

Generování atraktoru vychází z řešení soustavy diferenciálních rovnic. Jak je však známo, nalezení analytického řešení takovéto soustavy může být velice obtížné, někdy i nemožné. Z tohoto důvodu je při analýze chaotických systému často využívána numerická analýza. Pro řešení rovnic Lorenzova systému a také pro níže uvedené ostatní systémy byla využita procedura ze systému Matlab. Výpočet řešení soustavy využívá numerickou metodu Runge-Kutta kombinující 4. a 5. řád této metody. Vstupními parametry procedury jsou pouze integrační doba, počáteční podmínky a popis dané soustavy DR.



Obrázek 5 - Lorenzův atraktor při hodnotách $\sigma = 10$, $b = 8/3$ a $r = 28$

4.2 Chua oscilátor

Dalším známým dynamickým systémem vykazujícím chaos je již zmíněný jednoduchý elektronický obvod publikovaný Leonem Chuou v roce 1983. Zapojení se skládá ze čtyřech pasivních prvků a jednoho aktivního prvku, označovaného jako Chuova dioda. Obvod lze popsat pomocí soustavy tří diferenciálních rovnic [1]:

$$\frac{du_{C_1}}{dt} = \frac{1}{RC_1}(u_{C_2} - u_{C_1}) - \frac{1}{C_1}f(u_{C_1}) \quad (4.4)$$

$$\frac{du_{C_2}}{dt} = \frac{1}{RC_2}(u_{C_1} - u_{C_2}) + \frac{1}{C_2}i_L \quad (4.5)$$

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{L}u_{C_2} \quad (4.6)$$

kde u_{C_1} , u_{C_2} a i_L jsou napětí, resp. proudy prvků, které reprezentují proměnné stavového vektoru a R , L , C_1 , C_2 jsou hodnoty prvků. Funkce $f(u_{C_1})$ v rovnici 4.4 reprezentuje voltampérovou charakteristiku Chuovy diody.

Základní zapojení Chuova obvodu využívá pro vytváření nelineární VA charakteristiky tzv. PWL funkci (z angl. Piecewise-linear function). Tato funkce je tvořena lineárními úseky, které v prahových napětích přechází do dalšího lineárního úseku s jiným sklonem. Pro n úseků lze tuto funkci zapsat rovnicí

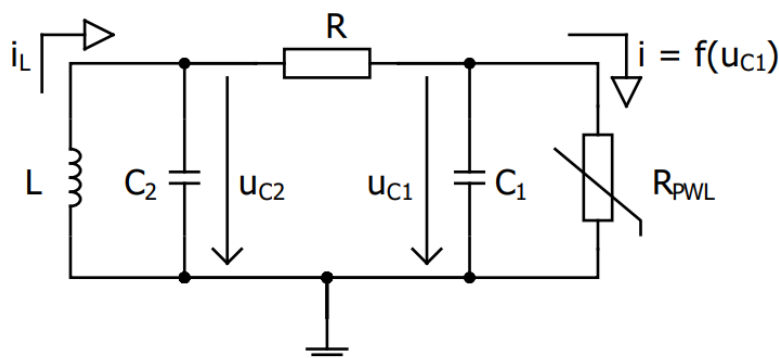
$$f(u_{C_1}) = (m_{2n-1}u_{C_1}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1}[(m_{i-1} - m_i)(|u_{C_1} + h_i| - |u_{C_1} - h_i|)] \quad (4.7)$$

kde m_i označuje směrnici úseku a h_i prahové napětí určující bod zlomu mezi dvěma úseky [1].

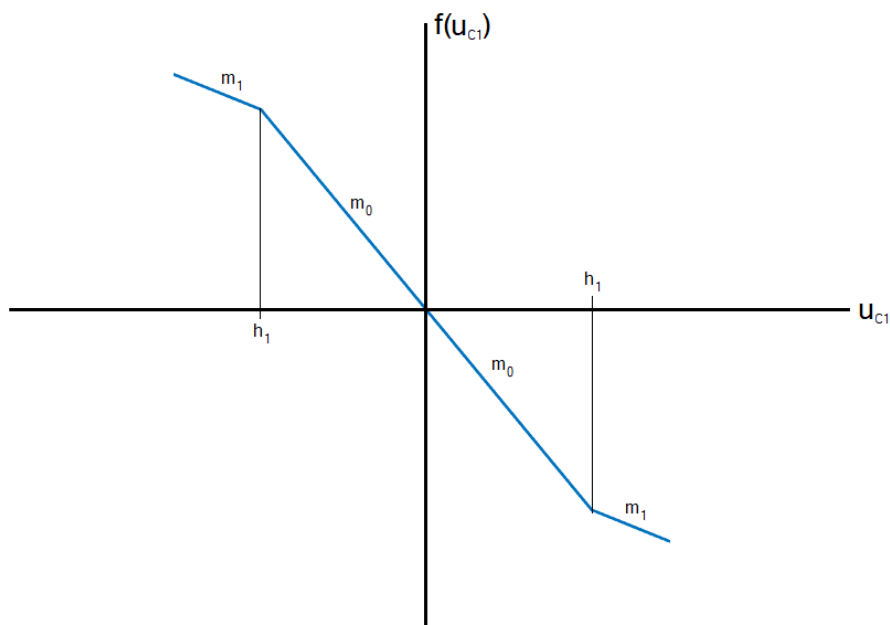
Pro nejjednodušší případ $n = 1$ dostáváme třísegmentovou PWL funkci, kterou lze zapsat pomocí 4.7 ve zjednodušeném tvaru

$$f(u_{C_1}) = (m_1u_{C_1}) + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|u_{C_1} + h_1| - |u_{C_1} - h_1|) \quad (4.8)$$

Ve skutečnosti je výše zmíněná PWL funkce pětisegmentová, neboť poslední dva segmenty jsou tvořeny saturačním napětím aktivních prvků tvořících Chuovu diodu. Většinou se však tato funkce označuje jako třísegmentová, protože poslední dva segmenty se nacházejí mimo pracovní oblast a nepodílí se na tvorbě chaotického atraktoru.

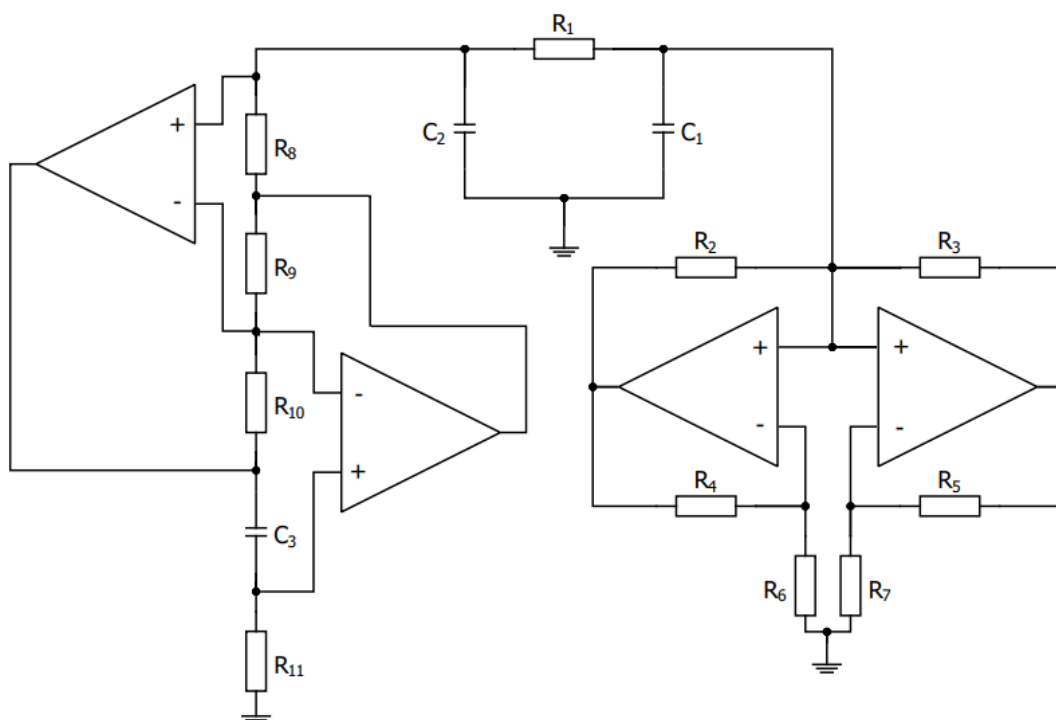


Obrázek 6 – Schéma Chuova obvodu

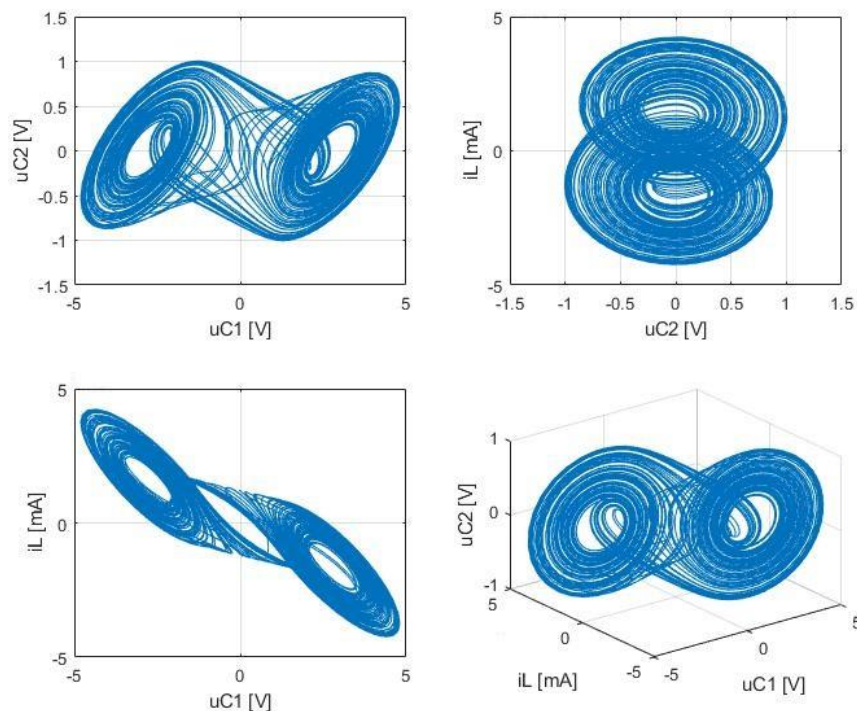


Obrázek 7 – Závislost třísegmentové PWL funkce na napětí u_{C1}

Realizace Chuovy diody s třísegmentovou PWL funkcí je v praxi možná několika způsoby [1]. Nejjednodušší zapojení, které realizuje negativní rezistory, obsahuje pouze 2 operační zesilovače a rezistory. Operační zesilovače jsou též využity pro vytvoření syntetického induktoru, neboť požadavky na hodnotu indukčnosti nejsou dosažitelné klasickou cívkou. Na obr. 8 je zobrazeno kompletní zapojení, včetně Antoniova gyrátoru pro vytvoření syntetické indukčnosti a obvodu pro realizaci PWL funkce s hodnotami převzatými z [1]. Při hodnotě $R_I = 1970 \, \Omega$ dochází v obvodu k chaotickému chování, které generuje tzv. Double-scroll atraktor, zobrazený na obr. 9. Atraktor byl vygenerovaný pomocí skriptu z programu Matlab, tvarově však odpovídá obvodu realizovaného pomocí třísegmentové PWL funkce. Jeho charakteristickým rysem jsou dvě oblasti, kde dochází k hustým neperiodickým pohybům.



Obrázek 8 – Schéma Chuova obvodu s reálnými prvky



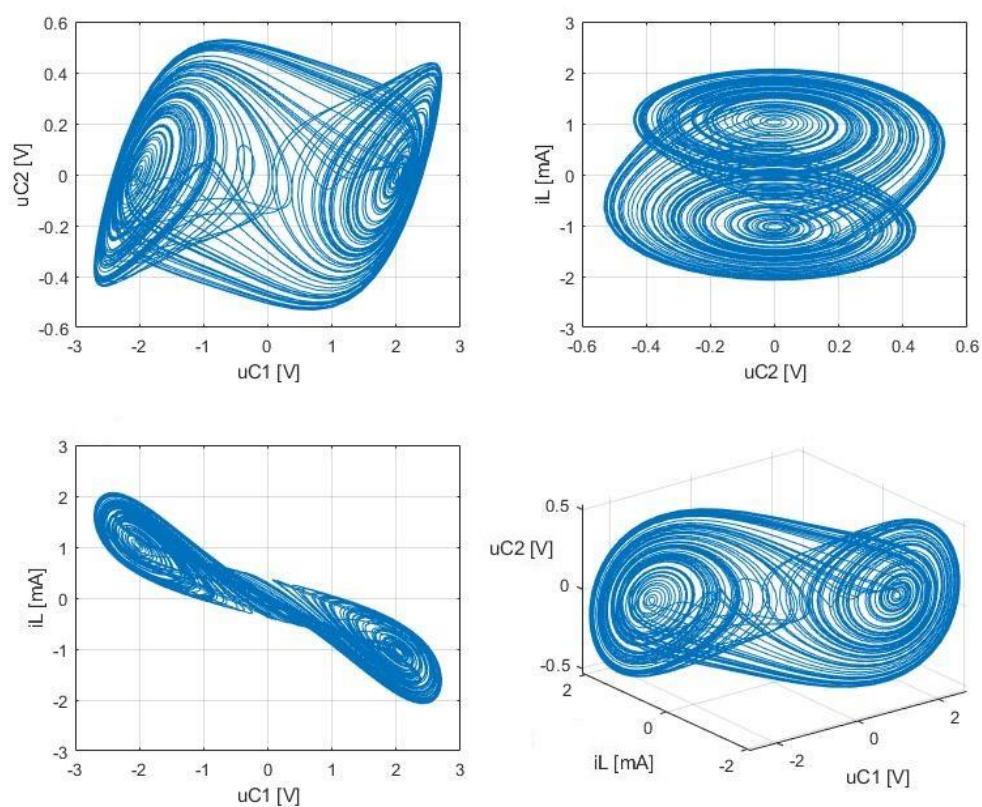
Obrázek 9 - Double-scroll atraktor pro hodnotu $R_I = 1970 \, \Omega$

Pro rozšíření PWL funkce o další body zlomu se využívá rozšíření zapojení Chuovy diody o další segmenty s OZ. Vícenásobná segmentace PWL funkce má za následek rozdílnou podobu výsledného chaotického atraktoru. Například pro funkci s 15 segmenty dochází ke vzniku Multi-scroll atraktoru s osmi hustě neperiodickými oblastmi.

PWL funkce není jediným generátorem nelinearity používaným v Chuově obvodu. Dle [1] může mít Chuova dioda VA charakteristiku tvořenou např. kubickou funkcí podle vztahu 4.9.

$$f(u_{c_1}) = h_1 u_{c_1} + h_2 u_{c_1}^3 \quad (4.9)$$

Zapojení oscilátoru zůstává stejné, změna nastane pouze v zapojení Chuovy diody, která je tvořena analogovými násobičkami. Numerický model tohoto obvodu pro hodnoty převzaté z [1] generuje také Double-scroll atraktor, který se od atraktoru tvořeném PWL funkcí liší především v přechodové oblasti mezi neperiodickými oblastmi. Podobným způsobem lze realizovat i funkci tvořenou sinusovým průběhem. Zapojení takového obvodu však již nabírá na větší složitosti způsobenou využitím speciálních integrovaných obvodů.



Obrázek 10 – Atraktor při použití kubické funkce pro hodnoty $h_1 = -0,599 \cdot 10^{-3}$, $h_2 = 0,0218 \cdot 10^{-3}$

5. CHAOTICKÝ ZESILOVAČ VE TŘÍDĚ C

5.1 Simulační model tranzistorového stupně

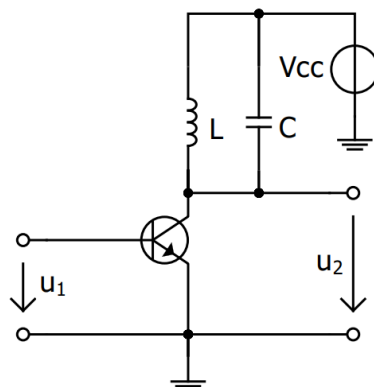
Dalším analyzovaným obvodem je tranzistorový zesilovač pracující ve třídě C (obr. 11), tj. jeho pracovní bod je umístěn hluboko za bod zániku kolektorového klidového proudu. Pomocí ekvivalentního modelu obvodu zesilovače na obr. 12 je možné dle [26] odvodit soustavu diferenciálních rovnic popisujících změnu vstupního a výstupního napětí u_1 , u_2 a kolektorového proudu (v tomto případě proudu cívkou i_L):

$$\frac{du_1}{dt} = -\frac{y_{11}}{c_1}u_1 - \frac{y_{12}}{c_1}u_2 \quad (5.1)$$

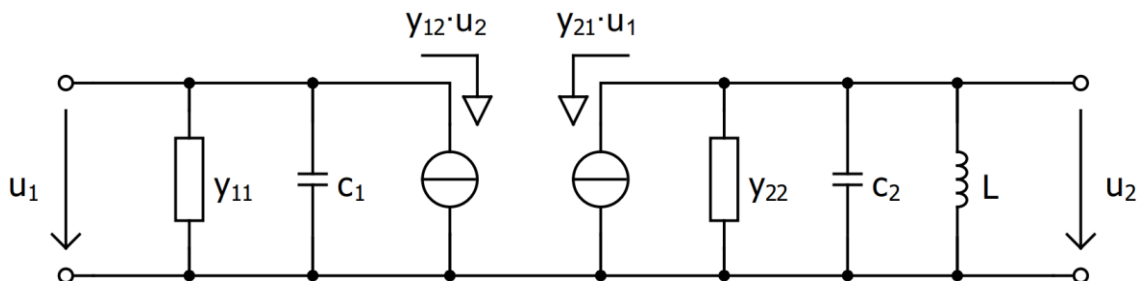
$$\frac{du_2}{dt} = -\frac{y_{21}}{c_2}u_1 - \frac{y_{22}}{c_2}u_2 - \frac{1}{c_2}i_L \quad (5.2)$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}u_2 \quad (5.3)$$

kde y_{xx} popisují admitanční parametry tranzistoru, c_1 parazitní kapacitu mezi bazí a emitorem a c_2 kapacitu vzniklou součtem parazitní kapacity mezi kolektorem a emitorem a kapacitou kondenzátoru v rezonančním obvodu. Jedná se o třidimenzionální spojitý dynamický systém, tudíž je splněna jedna z podmínek ke vzniku chaotického řešení.



Obrázek 11 - Tranzistorový zesilovač ve třídě C



Obrázek 12 - Ekvivalentní obvodový model tranzistorového zesilovače ve třídě C

Chaotické chování obvodu je podmíněno definicí admitančních parametrů tranzistoru. Předpokládáme, že vstupní a přenosová vodivost y_{11} a y_{21} zůstává konstantní a výstupní vodivost y_{22} se blíží k nule. Zpětná přenosová vodivost y_{12} v tomto případě tvoří nelineární funkci závislosti na napětí u_2 tvořenou polynomem

$$y_{12}(u_2) = a + bu_2 + cu_2^2 + du_2^3 + eu_2^4 \quad (5.4)$$

kde a, b, c, d, e jsou parametry reprezentující působení daného členu polynomu. Polynomiální vyjádření parametru y_{12} není striktně omezeno pouze na tento parametr a pro chaotické chování obvodu existují i varianty s parametrem y_{21} ve tvaru polynomu, případně oba admitanční parametry jsou dány polynomy. Varianta s polynomem y_{12} je využita z důvodu lepší obvodové realizace. Na základě ekvivalentního obvodu a znalosti podmínek pro admitanční parametry lze konstruovat obvod, který za pomoci složitějších aktivních prvků simuluje ekvivalentní model tranzistoru se zpětným přenosem realizovaným jako zpětná vazba. Jeho obvodová realizace vychází z diferenciálních rovnic získaných pomocí Kirchhoffových zákonů, které popisují průběh proudu na uzemněných kapacitorech a průběh napětí na induktoru. Tranzistorový stupeň je modelován transadmitančním zesilovačem reprezentujícím parametrem y_{21} , pasivní prvky simulují parametr y_{11} a parazitní kapacity tranzistoru a polynom y_{12} je tvořen analogovými násobičkami s jednotlivými rezistory. Pokud dosadíme rovnici 5.4 do soustavy DR, dostáváme soustavu, ze které lze modelovat schéma obvodu:

$$\frac{du_1}{dt} = -\frac{y_{11}}{c_1}u_1 - \frac{a}{c_1}u_2 + \frac{b}{c_1}u_2^2 + \frac{c}{c_1}u_2^3 + \frac{d}{c_1}u_2^4 + \frac{e}{c_1}u_2^5 \quad (5.5)$$

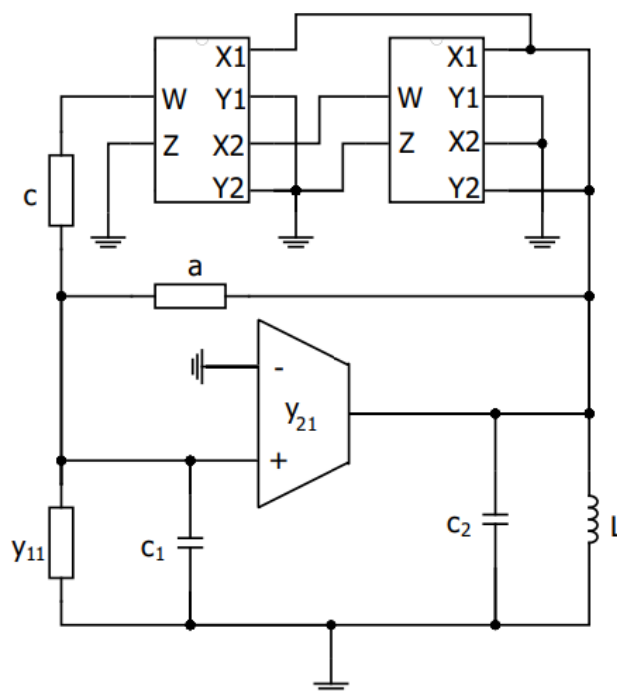
$$\frac{du_2}{dt} = -\frac{y_{21}}{c_2}u_1 - \frac{1}{c_2}i_L \quad (5.6)$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}u_2 \quad (5.7)$$

Ze soustavy vyplývá, že koeficienty a, b, c, d, e mají rozměr vodivosti, kterou prochází proud závislý na mocnině napětí u_2 . Dle [26] pro tuto soustavu DR existuje až 6 případů, při kterých se systém s polynomiálním vyjádřením transadmitance y_{12} chová chaoticky. Uvedené schéma reprezentuje případ č. 3, pro ostatní případy by bylo nutné pouze přepojit zapojení v oblasti analogových násobiček a zpětnovazebních vodivostí.

Č. případu	y_{11}	y_{21}	a	b	c	d	e
1	0,56	1	0	2,1	0	-1,1	0
2	0,5	1	0	0	3	0	-1,5
3	0,3	1	5	0	-2	0	0
4	0,4	1	0	2,7	0	-2	0
5	0,3	1	0	0	3	0	-2
6	0,58	1,3	1,67	0	0	0	-0,77

Tab 5-1 - Hodnoty parametrů zpětné přenosové admitance převzatých z [26]

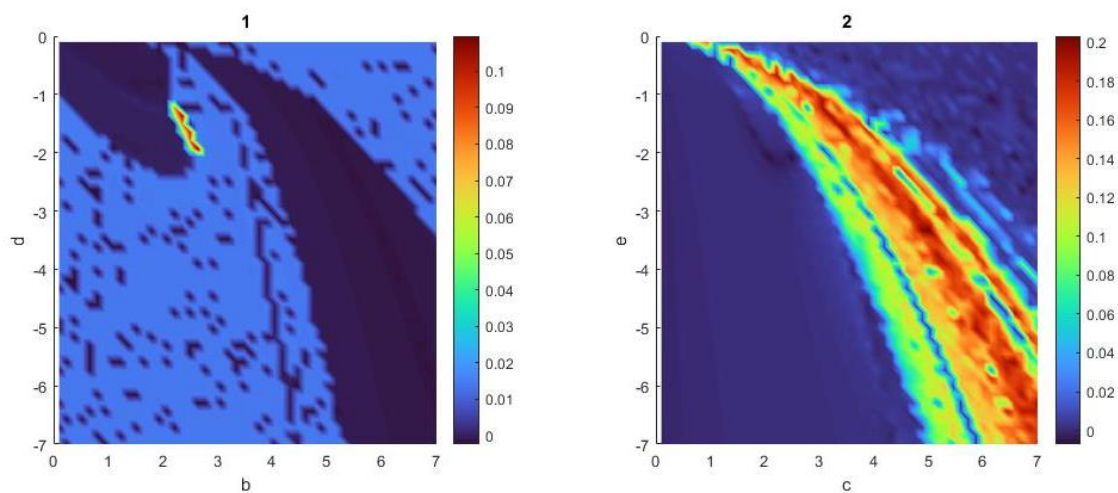


Obrázek 13 - Ekvivalentní model tranzistorového stupně s aktivními prvky pro případ č. 3

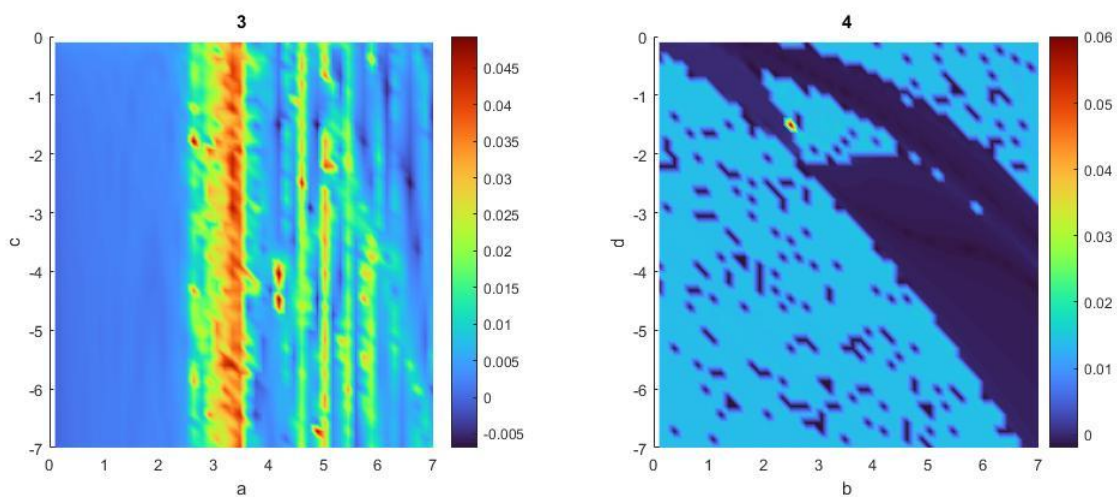
5.2 Analýza z hlediska maximálního chaosu

Pro analýzu maximálně chaotické kombinace parametrů zpětné admitance y_{12} je využito výpočtu spektra Ljapunovových exponentů. Jelikož se chaotický atraktor dle tab. 5-1 vyskytuje v trojdimenzionálním systému pouze při kladném exponent λ_1 , lze pro stanovení maximální míry chaosu sledovat pouze nejvyšší hodnotu Ljapunovova exponentu. V anglické literatuře se tento exponent označuje zkratkou LLE (z angl. Largest Lyapunov Exponent). Hledání maximálního chaotického chování bylo provedeno výpočtem pomocí algoritmu využívajícího Gram-Schmidtův ortonormalizační proces. Algoritmus vypočítává ve smyčce velké množství řešení diferenciálních rovnic pro rozsáhlý časový interval a na základě předchozích výsledků konstruuje novou ortonormální bázi systému vystupující jako počáteční podmínky pro další krok. Ljapunovovy exponenty se na základě tohoto algoritmu vypočítávají iterativně.

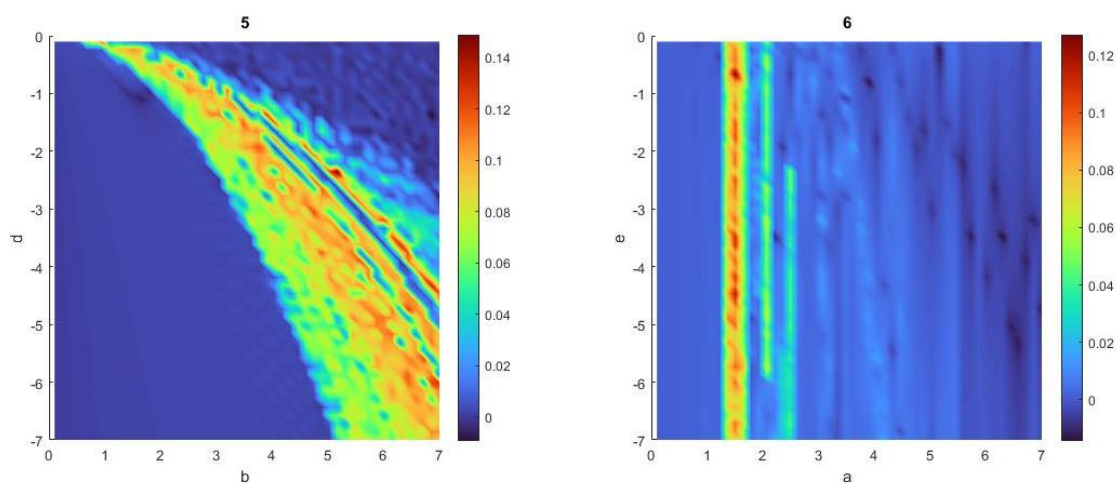
Pomocí skriptu v Matlabu se do grafické závislosti vynášejí hodnoty LLE při rozmítání dvojice nenulových parametrů, které jsou definovány v tab. 5-1. Hodnoty vstupních admitancí y_{11} zůstávají stejné a parametry systému jsou rozmítány, přičemž parametr s nižší mocninou je rozmítán v kladném směru od 0,1 do 7 a s vyšší mocninou od -7 do -0,1. V tab. 5-2 jsou sepsány hodnoty pro jednotlivé případy, při kterých má systém nejvyšší hodnotu LLE, tj. systém je maximálně chaotický.



Obrázek 14 - Grafické vyjádření LLE pro případ 1 a 2



Obrázek 15 - Grafické vyjádření LLE pro případ 3 a 4



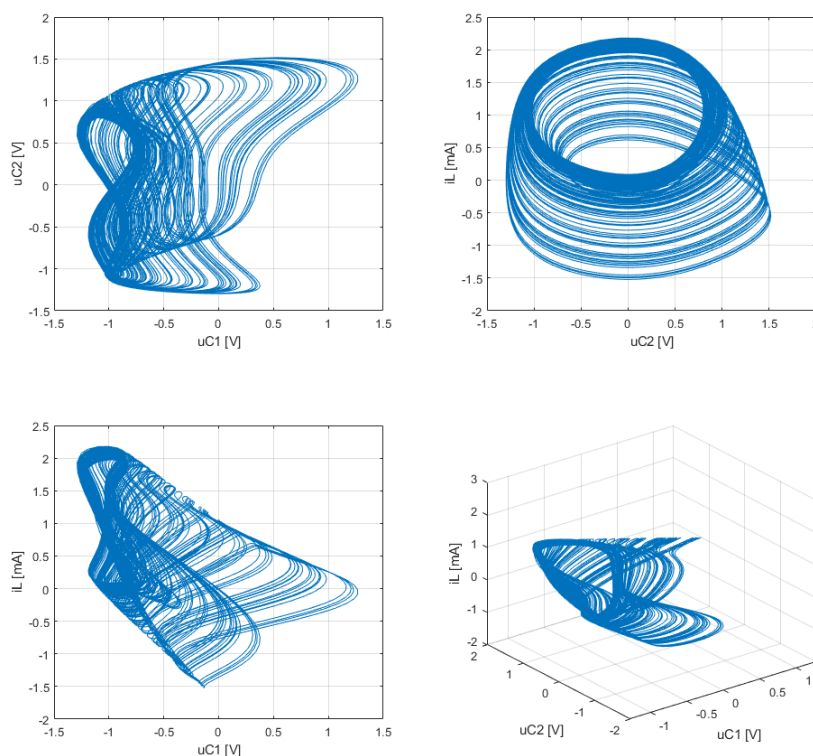
Obrázek 16 - Grafické vyjádření LLE pro případ 5 a 6

Č. případu	y_{11}	y_{21}	a	b	c	d	e	LLE
1	0,56	1	0	2,6	0	-1,9	0	0,109
2	0,5	1	0	0	5,02	0	-3,34	0,203
3	0,3	1	4,18	0	-4,46	0	0	0,0485
4	0,4	1	0	2,49	0	-1,51	0	0,060
5	0,3	1	0	0	5,17	0	-2,35	0,149
6	0,58	1,3	1,51	0	0	0	-0,66	0,115

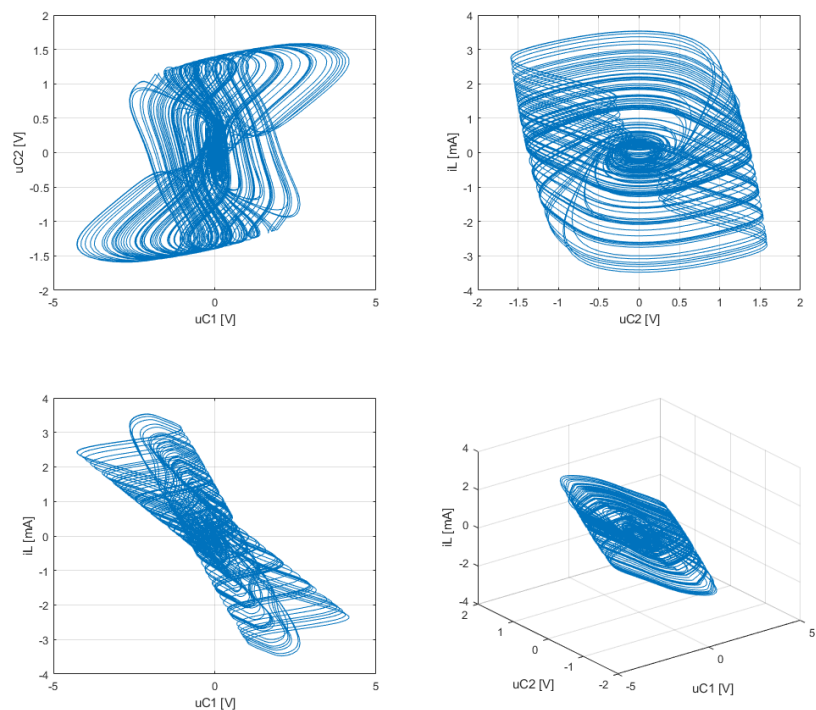
Tab 5-2 - Hodnoty parametrů zpětné přenosové admitance při maximální hodnotě LLE

Z obr. 14 je patrné, že případ č. 1 obsahuje pouze malou oblast s vysokou hodnotou LLE, ale chaotické atraktory existují i v oblastech s nízkou hodnotou LLE, neboť tyto hodnoty jsou také kladné. Světle modré oblasti s konstantní hodnotou však chaotické nejsou, protože při zpětné kontrole vykreslením atraktoru je stav systému atrahován do nekonečna. Tato nedokonalost je způsobena použitým algoritmem, který umožňuje pouze odhad ljarunovových exponentů a chyba v určení ljarunovových exponentů se může vyskytnout. Z těchto důvodů je nutné kontrolovat výsledky pomocí vykreslování atraktorů. Tato chyba však nemá vliv na hledanou oblast s maximální mírou chaosu.

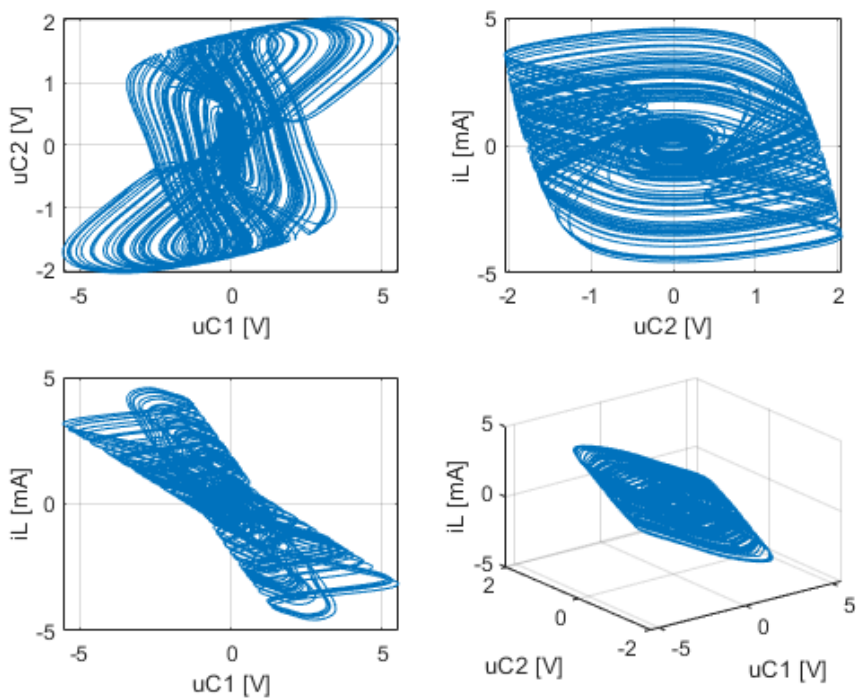
Případ č. 2 z obr. 14 narozdíl od případu č. 1 obsahuje rozsáhlou oblast parametrů s velkou hodnotou LLE. Zajímavostí tohoto případu je, že při hodnotách parametrů pohybujících se po linii velké hodnoty LLE (v obr. 14 červená oblast) má systém poměrně stabilní tvar atraktoru, jak je možné pozorovat z obr. 18 až 20. Ke změnám dochází pouze ve velikosti atraktoru ve stavovém prostoru.



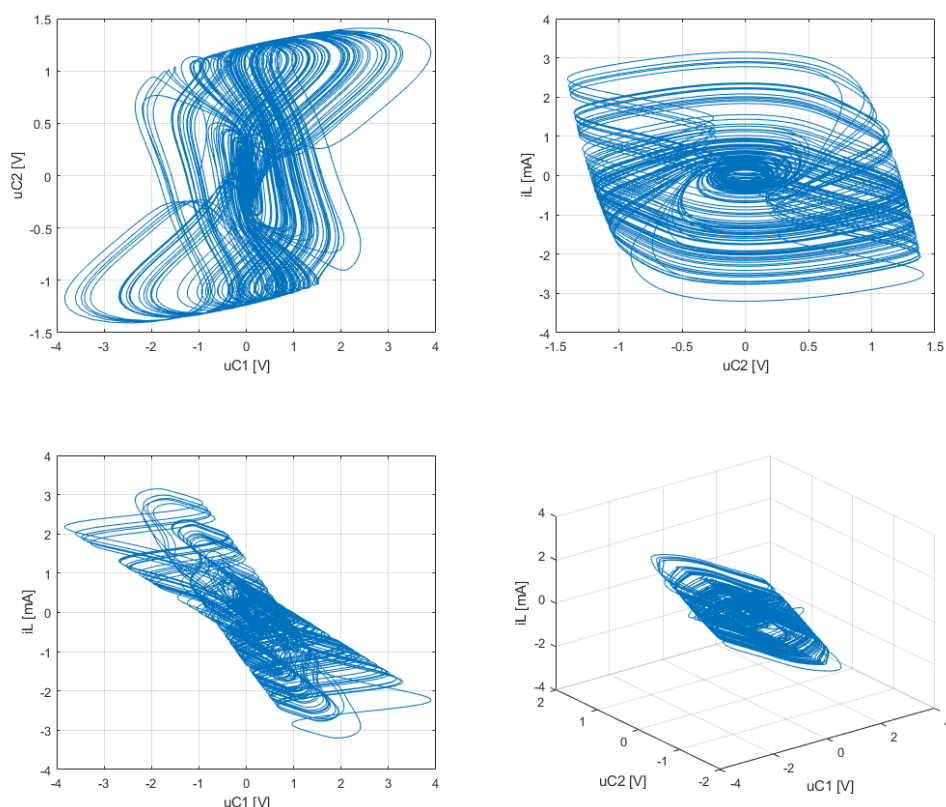
Obrázek 17 - Atraktor tranzistorového zesilovače pro případ č. 1 při maximálním LLE ($y_{11} = 0,56$; $y_{21} = 1$; $b = 2,6$; $d = -1,9$, $a = c = e = 0$; LLE = 0,109)



Obrázek 18 - Atraktor tranzistorového zesilovače pro případ č. 2 při maximálním LLE ($y_{11} = 0,5$; $y_{21} = 1$; $c = 5,02$; $e = -3,34$, $a = b = d = 0$; LLE = 0,203)



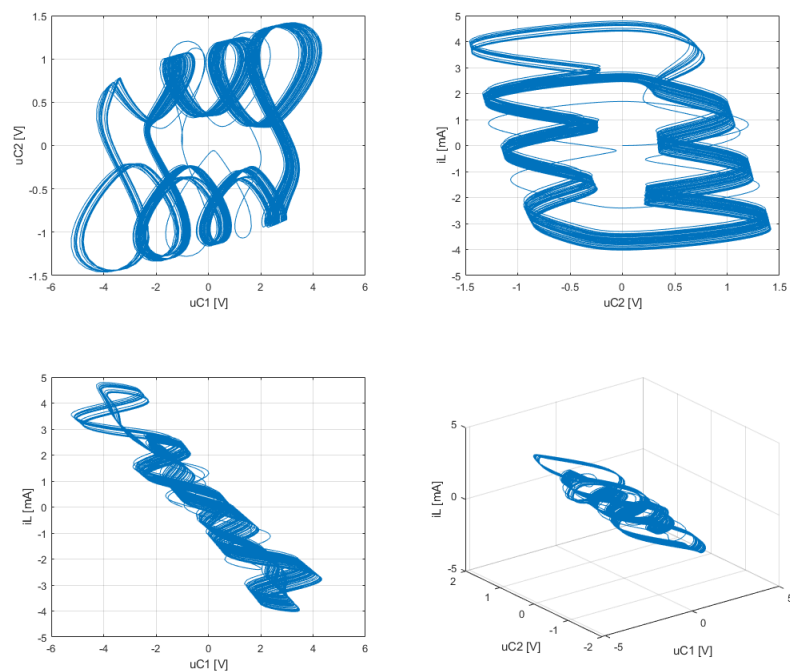
Obrázek 19 - Atraktor tranzistorového zesilovače pro případ č. 2 při hodnotách $y_{11} = 0,5$; $y_{21} = 1$; $c = 3,06$; $e = -1,23$, $a = b = d = 0$; LLE = 0,192



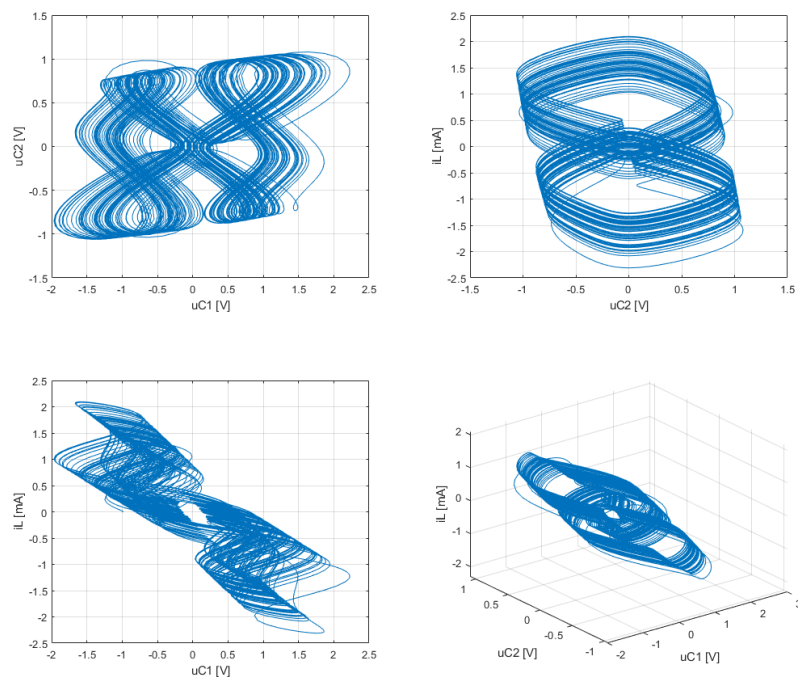
Obrázek 20 - Atraktor tranzistorového zesilovače pro případ č. 2 při hodnotách $y_{11} = 0,5$; $y_{21} = 1$; $c = 6,58$; $e = -6,6$, $a = b = d = 0$; $LLE = 0,197$

Obr. 15 obsahuje analýzu případu č. 3. V grafickém zobrazení LLE je možné sledovat pásmovou strukturu s většími hodnotami LLE. V daných pásmech se atraktor chová podobně, jako v případě č. 2, tj. nedochází k významnější změně v jeho struktuře, pouze se mění jeho velikost. Při přechodu do jiného pásma však dochází také k tvarovým změnám. Jelikož pásma jsou orientována ve svislém směru, tvar systému je tudíž závislý pouze na hodnotě parametru a . Zobrazené atraktory na obr. 21 až 23 vyobrazují situace v prvním, druhém a čtvrtém pásmu. Druhé pásmo zároveň obsahuje maximální hodnotu LLE.

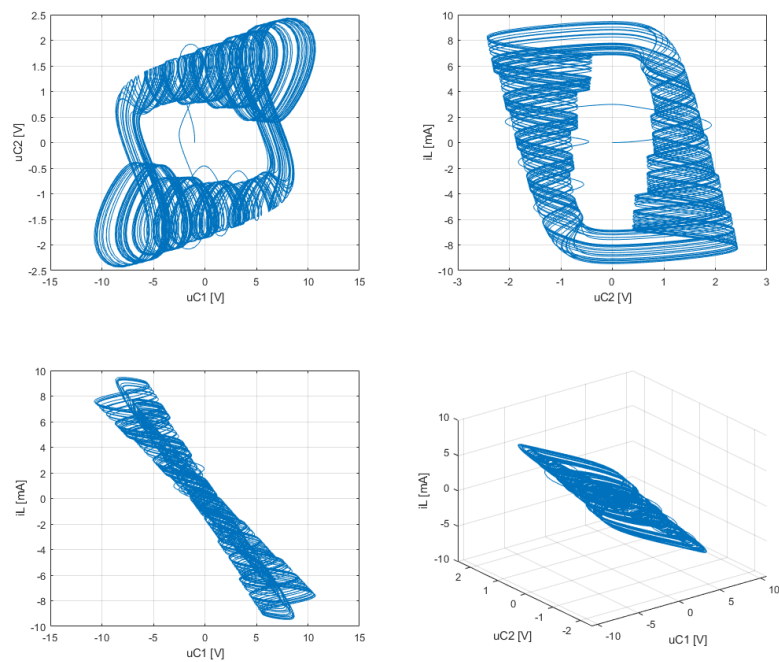
Z případu č. 4 je možné vysledovat jistou podobnost s případem č. 1. Oblast s vysokou hodnotou LLE je v porovnání s případem č. 1 ještě menší, zároveň se zde také vyskytují oblasti chybného výpočtu se světle modrou barvou. Jedná se o očekávaný fakt, neboť oba případy spolu souvisí skrze stejné rozmítané parametry b a d , liší se pouze v hodnotě vstupní admitance y_{11} . Podobnost těchto systémů lze sledovat i prostřednictvím jejich atraktorů, které vykazují kruhovou periodicitu.



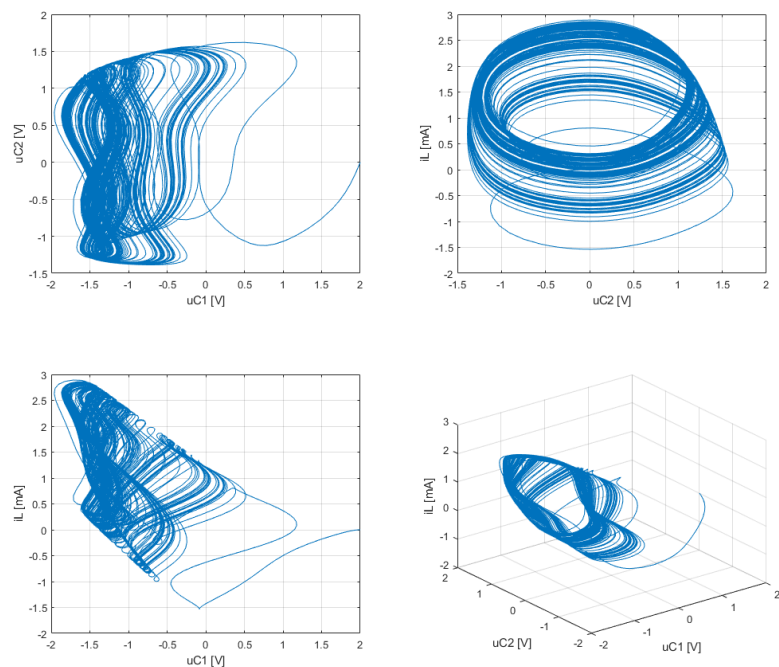
Obrázek 21 - Atraktor tranzistorového zesilovače pro případ č. 3 při maximálním LLE ($y_{11} = 0,3$; $y_{21} = 1$; $a = 4,18$; $c = -4,46$, $b = d = e = 0$; LLE = 0,0485)



Obrázek 22 - Atraktor tranzistorového zesilovače pro případ č. 3 v prvním pásmu při hodnotách $y_{11} = 0,3$; $y_{21} = 1$; $a = 3,34$; $c = -5,59$, $b = d = e = 0$; LLE = 0,0456



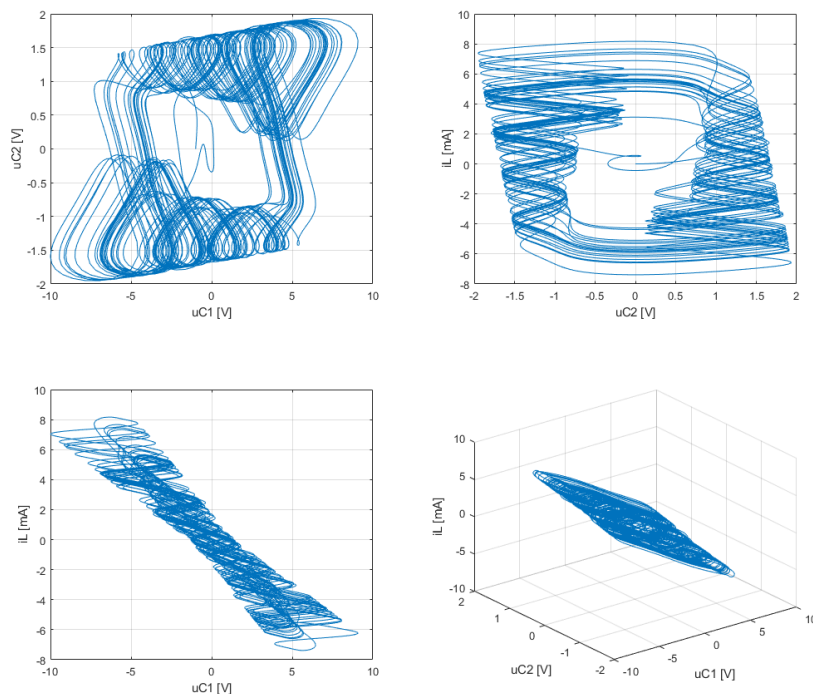
Obrázek 23 - Atraktor tranzistorového zesilovače pro případ č. 3 ve čtvrtém pásmu při hodnotách $y_{11} = 0,3$; $y_{21} = 1$; $a = 5$; $c = -2$, $b = d = e = 0$; $LLE = 0,0325$ [26]



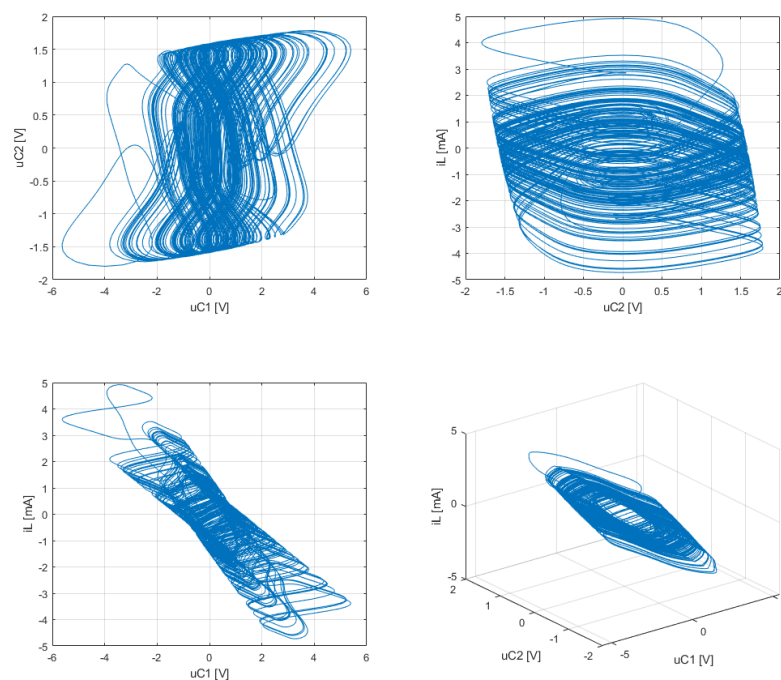
Obrázek 24 - Atraktor tranzistorového zesilovače pro případ č. 4 při maximálním LLE ($y_{11} = 0,4$; $y_{21} = 1$; $b = 2,49$; $d = -1,51$, $a = c = e = 0$; $LLE = 0,060$)

Případ č. 5 z obr. 16 se z hlediska grafické závislosti LLE a tvarem svých atraktorů chová nejzajímavěji ze všech uvedených případů, neboť kombinuje vlastnosti případu č. 2 a 3. Stejně jako v případě č. 2 je možné v grafické závislosti LLE pozorovat široký pás vysokých hodnot LLE, který je svým tvarem téměř shodný s případem č. 2. Tato souvislost je očekávaná, jelikož nenulové hodnoty parametrů systému jsou v obou případech shodné, ale oproti případu č. 2 nejsou atraktory případu č. 5 stejné v celém rozsahu vysokých hodnot LLE. Atraktor se svým tvarem podobá případu č. 3 v oblasti čtvrtého pásma v případě, že se rozsah parametrů pohybuje v oblasti vyšší hodnoty parametru b a méně záporné hodnoty parametru d . V dalších případech inklinuje svou podobou k případu č. 2, jak je možné pozorovat na obr. 26 a 27.

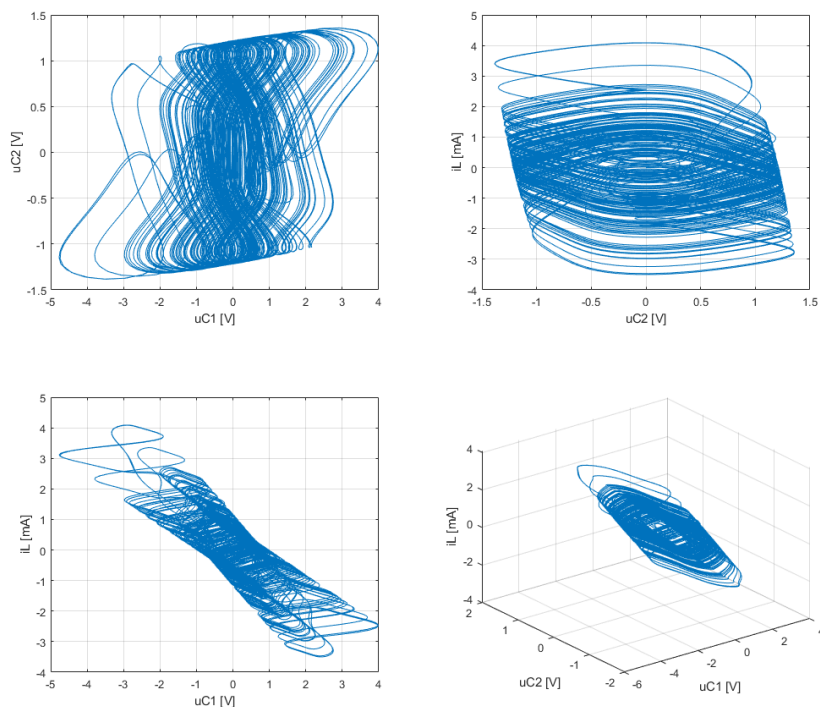
Na obr. 16 je také vyobrazena grafická závislost LLE pro případ č. 6, který vykazuje pásmovou strukturu podobně jako případ č. 3. Pásem s vysokou hodnotou LLE je zde méně a nejdominantnějším pásmem je oblast s hodnotou parametru $a = 1,51$. V oblasti dominantního pásma jsou atraktory tvarově stabilní stejně jako v případě č. 1.



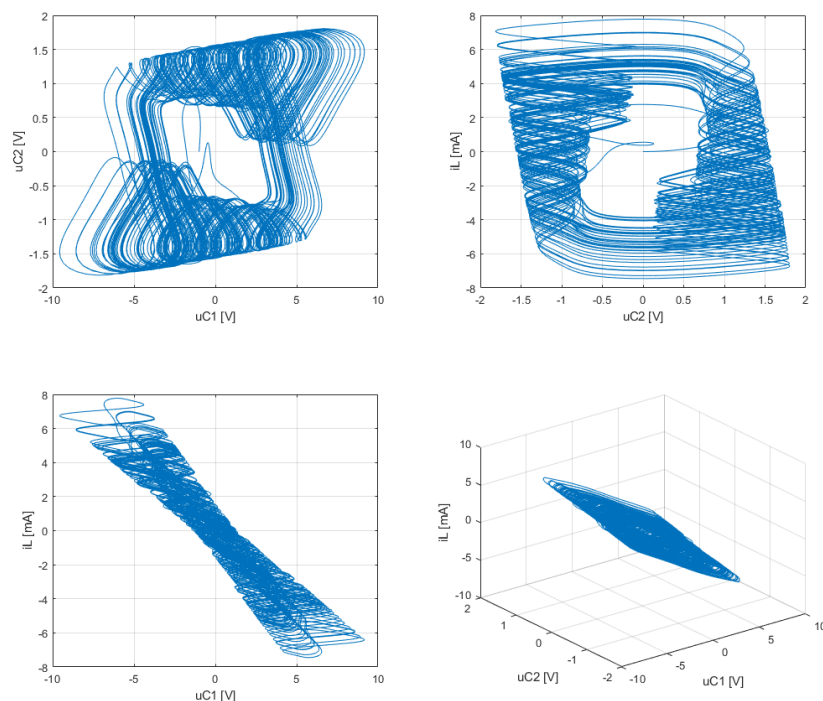
Obrázek 25 - Atraktor tranzistorového zesilovače pro případ č. 5 při maximálním LLE ($y_{11} = 0,4$; $y_{21} = 1$; $c = 5,17$; $e = -2,35$, $a = b = d = 0$; LLE = 0,149)



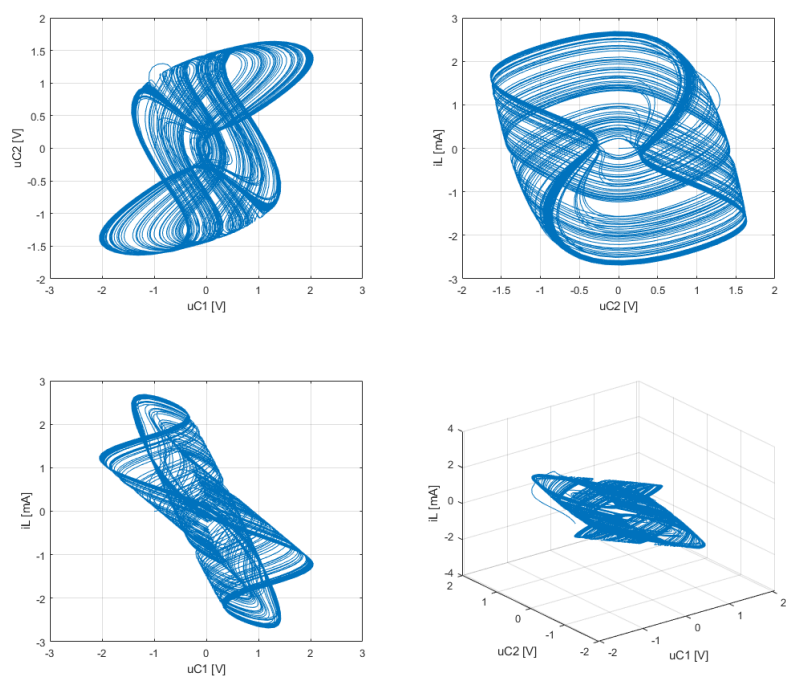
Obrázek 26 - Atraktor tranzistorového zesilovače pro případ č. 5 při hodnotách $y_{11} = 0,4$; $y_{21} = 1$; $c = 5,17$; $e = -2,35$, $a = b = d = 0$; $LLE = 0,118$



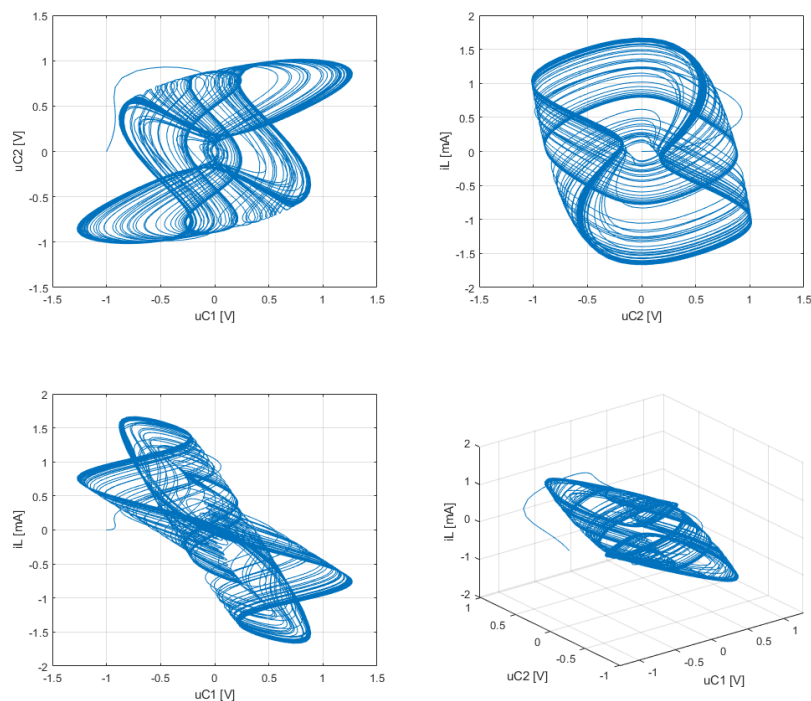
Obrázek 27 - Atraktor tranzistorového zesilovače pro případ č. 5 při hodnotách $y_{11} = 0,4$; $y_{21} = 1$; $c = 6,86$; $e = -6,01$, $a = b = d = 0$; $LLE = 0,122$



Obrázek 28 - Atraktor tranzistorového zesilovače pro případ č. 5 při hodnotách $y_{11} = 0,4$; $y_{21} = 1$; $c = 6,01$; $e = -3,2$, $a = b = d = 0$; $LLE = 0,122$



Obrázek 29 - Atraktor tranzistorového zesilovače pro případ č. 6 při maximálním LLE ($y_{11} = 0,58$; $y_{21} = 1,3$; $a = 1,51$; $e = -0,66$, $b = c = d = 0$; $LLE = 0,127$)



Obrázek 30 - Atraktor tranzistorového zesilovače pro případ č. 6 při hodnotách $y11 = 0,58$; $y21 = 1,3$; $a = 1,51$; $e = -4,46$, $b = c = d = 0$; $LLE = 0,115$

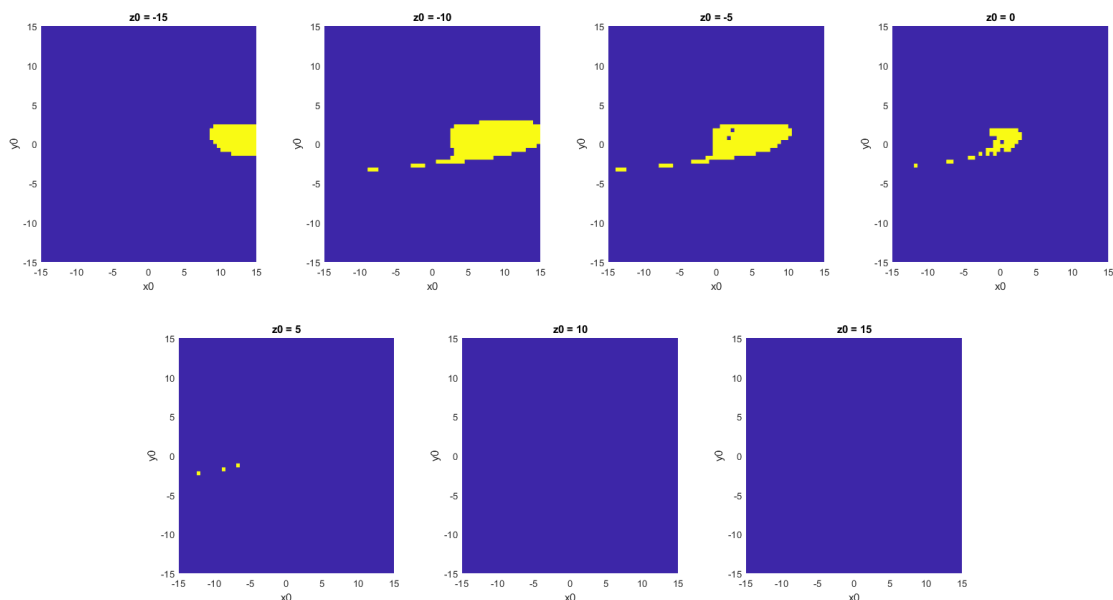
5.3 Analýza oblastí přitažlivosti

Výpočet oblastí přitažlivosti atraktoru lze konstruovat přes výpočet Ljapunovových exponentů, pouze dochází k rozmítání vektoru počátečních podmínek systému. Nevýhodou této metody je její velká výpočetní náročnost. Pro generování následujících obrázků popisujících oblast přitažlivosti byl využit jednodušší algoritmus, který pracuje se zjednodušující formou popisu oblasti přitažlivosti. Na počátku algoritmu je nalezen nejdelší stavový vektor podivného atraktoru pro některé z počátečních podmínek, při kterých podivný atraktor existuje. Následně je stanovena koule, jejíž velikost je odvozena od velikosti nejdelšího stavového vektoru a během rozmítání počátečních podmínek se sleduje, zda se řešení stále nachází uvnitř této koule. Předem je z tohoto algoritmu odstraněn bod $(0, 0, 0)$, ve kterém je atraktorem vždy bod přitažlivosti se stejnými souřadnicemi.

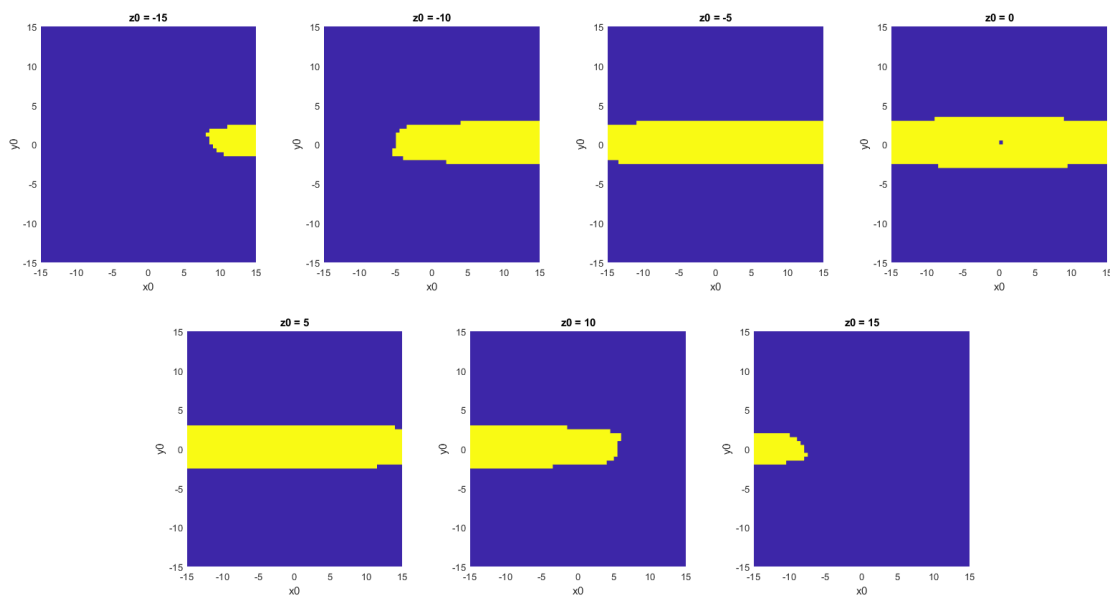
Na obr. 31 až 36 lze pozorovat grafické znázornění oblastí přitažlivosti generované pomocí zjednodušeného algoritmu. Žlutá oblast představuje řešení uvnitř definované koule, tj. existence podivného atraktoru, modré oblasti značí řešení nacházející se mimo definovanou kouli. Zde dochází k zasaturování trajektorie stavového vektoru na okrajových podmínkách. Všechna grafická znázornění oblastí přitažlivosti byla generována pro hodnoty parametrů s maximální hodnotou LLE. Metoda výpočtu oblastí přitažlivosti byla zpětně ověřena generací atraktorů s náhodně vybranými počátečními podmínkami

Jako nejzajímavější se jeví případy č. 1 a 4, u kterých je oblast s existencí podivného atraktoru menší než u zbývajících případů, což značí, že existuje omezenější množství

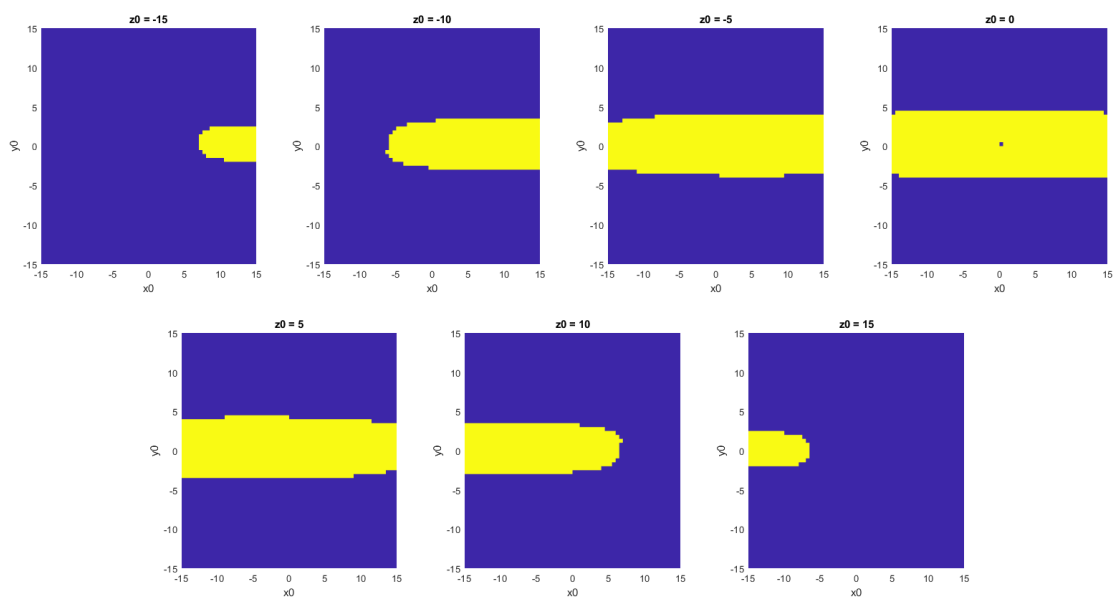
situací, při kterých systém skončí v chaotickém stavu. U ostatních případů je možné pozorovat rozsáhlé oblasti, při kterých systém skončí v chaotickém stavu.



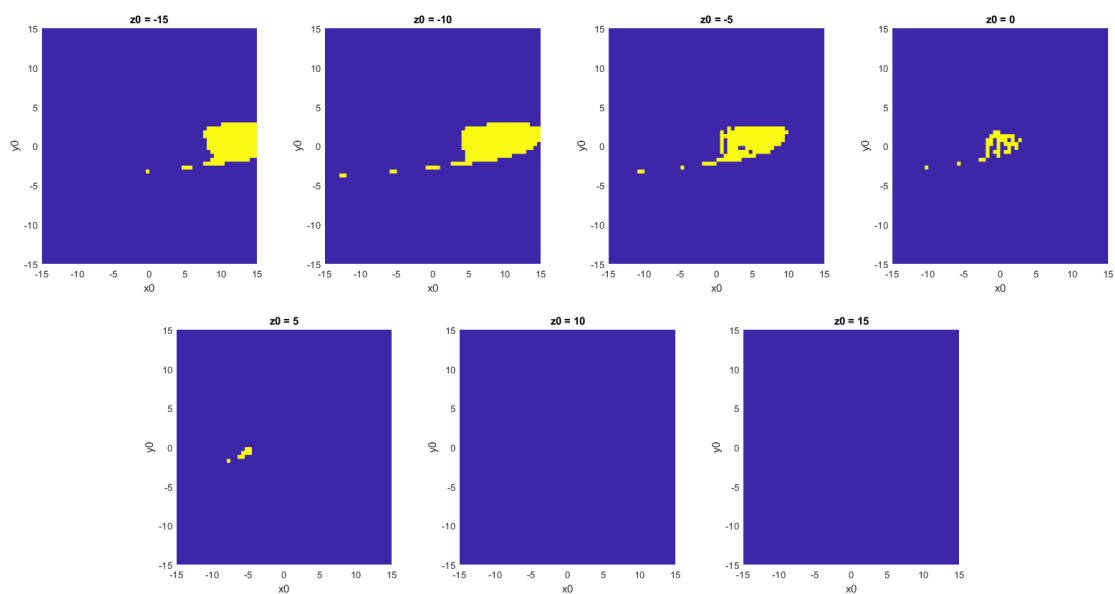
Obrázek 31 - Oblast přitažlivosti atraktoru případu č. 1 při maximálním LLE (oblast s podivným atraktorem vyznačena žlutě)



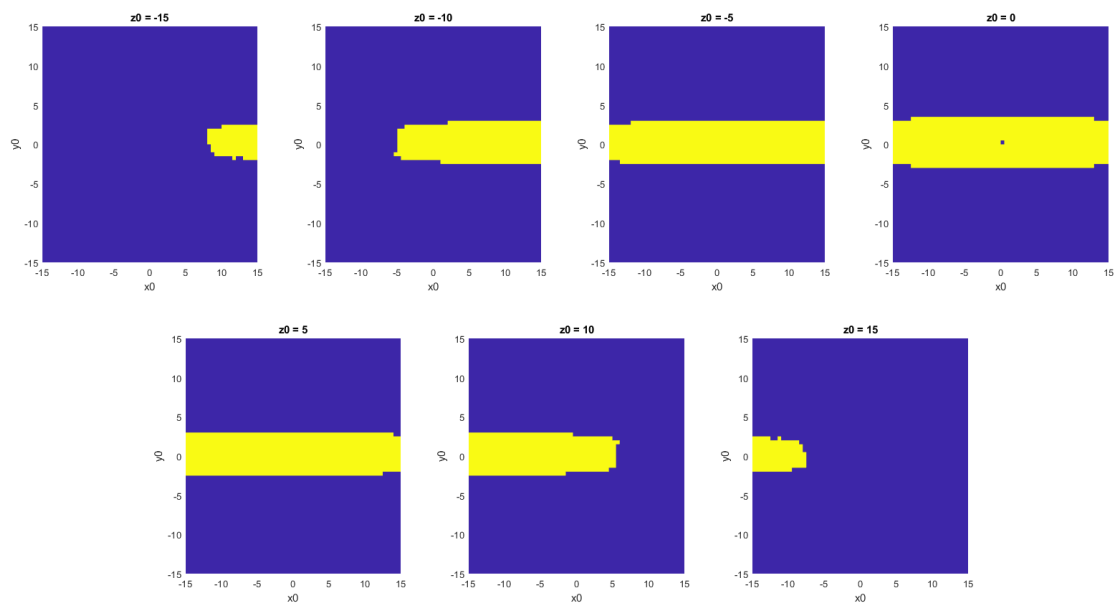
Obrázek 32 - Oblast přitažlivosti atraktoru případu č. 2 při maximálním LLE (oblast s podivným atraktorem vyznačena žlutě)



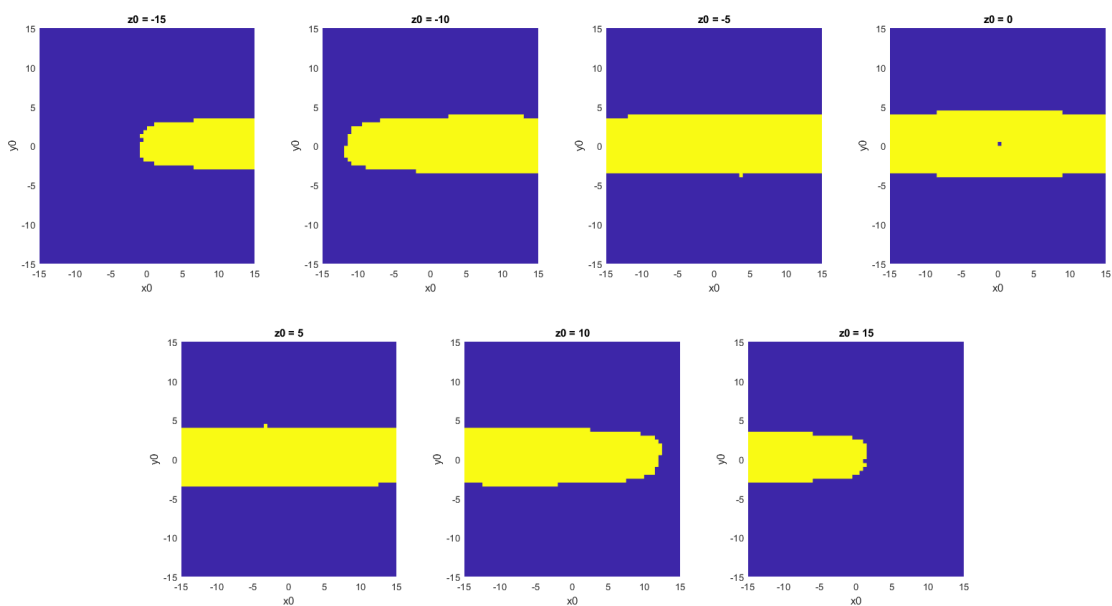
Obrázek 33 - Oblast přitažlivosti atraktoru případu č. 3 při maximálním LLE (oblast s podivným atraktorem vyznačena žlutě)



Obrázek 34 - Oblast přitažlivosti atraktoru případu č. 4 při maximálním LLE (oblast s podivným atraktorem vyznačena žlutě)



Obrázek 35 - Oblast přitažlivosti atraktoru případu č. 5 při maximálním LLE (oblast s podivným atraktorem vyznačena žlutě)

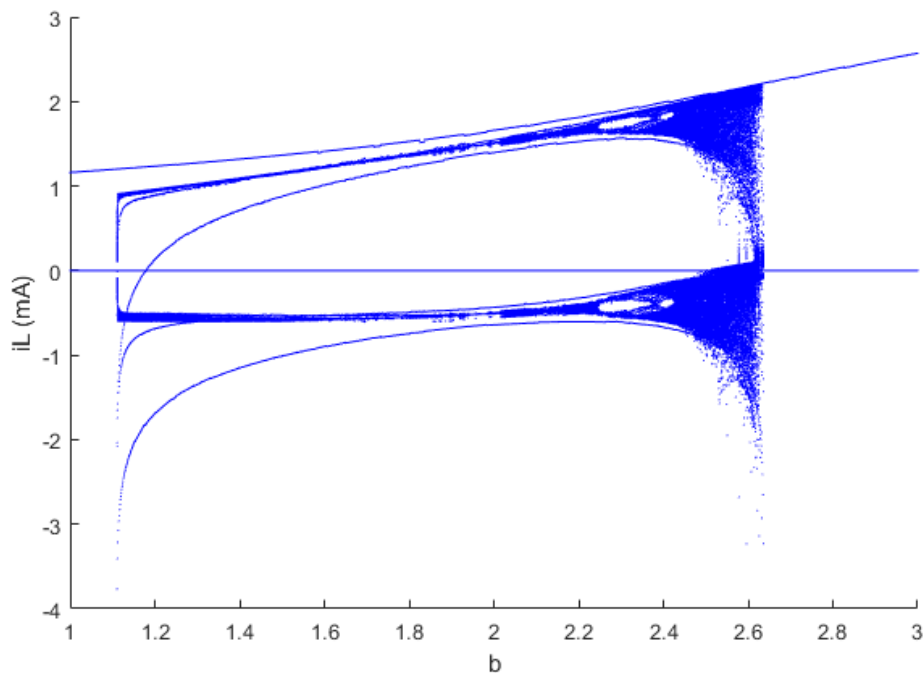


Obrázek 36 - Oblast přitažlivosti atraktoru případu č. 6 při maximálním LLE (oblast s podivným atraktorem vyznačena žlutě)

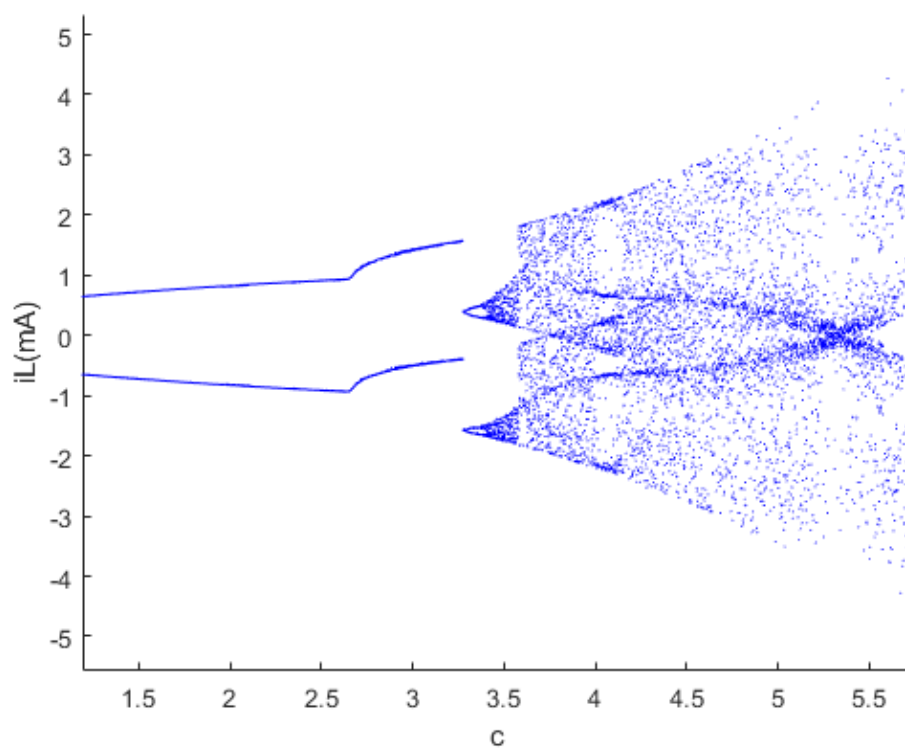
5.4 Analýza bifurkačních diagramů

Algoritmus výpočtu bifurkačních diagramů zaznamenává jednotlivé Poincarého sekce s různými hodnotami řídicího parametru a postupně skládá jejich průměty do grafu. U všech uvedených bifurkačních diagramů byl jako řídicí parametr zvolen ten, který v polynomu 5.4 zastupuje výstupní napětí u_2 s nižší mocninou. Druhý parametr je po celou dobu vykreslování konstantní a odpovídá hodnotám, při kterých bylo dosaženo maximálního LLE. Pro všechny grafy je také společná Poincarého sekce, která je umístěna do pozice $u_2 = 0$ V.

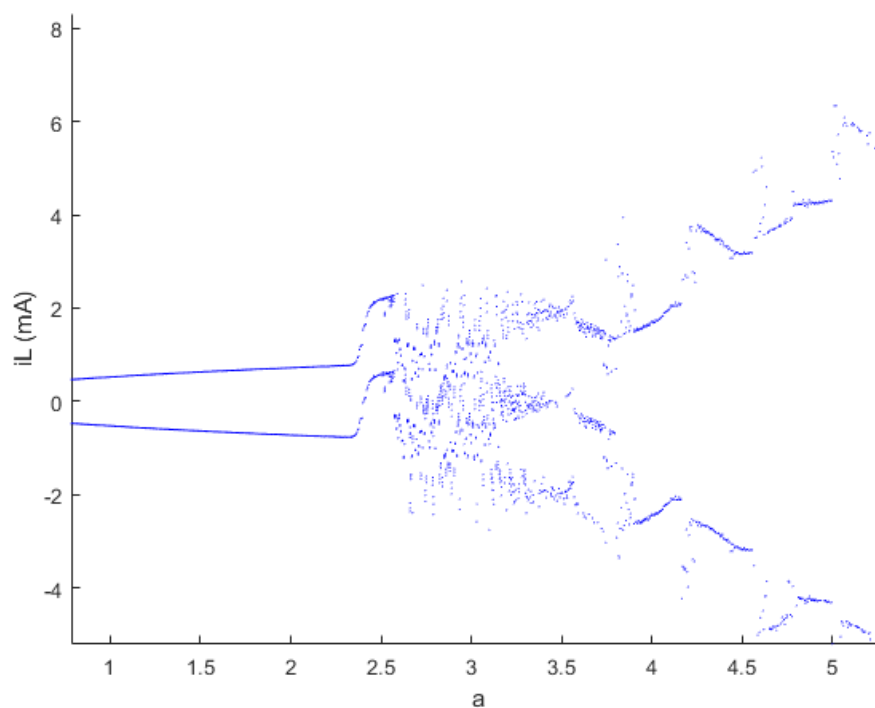
Pro takto zvolené podmínky lze u případu č. 1 na obr. 37 pozorovat s rostoucím parametrem b postupné narůstání rozptylu trajektorií až k hodnotě $b = 2,6$, kolem které je možné pozorovat velmi husté neperiodické pohyby. Podobná situace nastává i u bifurkačního diagramu případu č. 4, kde se tato oblast vyskytuje u hodnoty $b = 2,5$. Nejlépe pozorovatelné bifurkační jevy jsou u případu č. 2 na obr. 38. V oblasti hodnot parametru $c = 3,25$ až $c = 3,5$ lze pozorovat tradiční vidlicovou strukturu stejně jako u logistické funkce z obr. 3. Poměrně rozsáhlá oblast s hustými neperiodickými pohyby se vyskytuje u případu č. 5 na obr. 41. Na tomto diagramu lze také pozorovat, že při určité hodnotě dochází k velké bifurkaci a k postupnému nárůstu velikosti atraktoru.



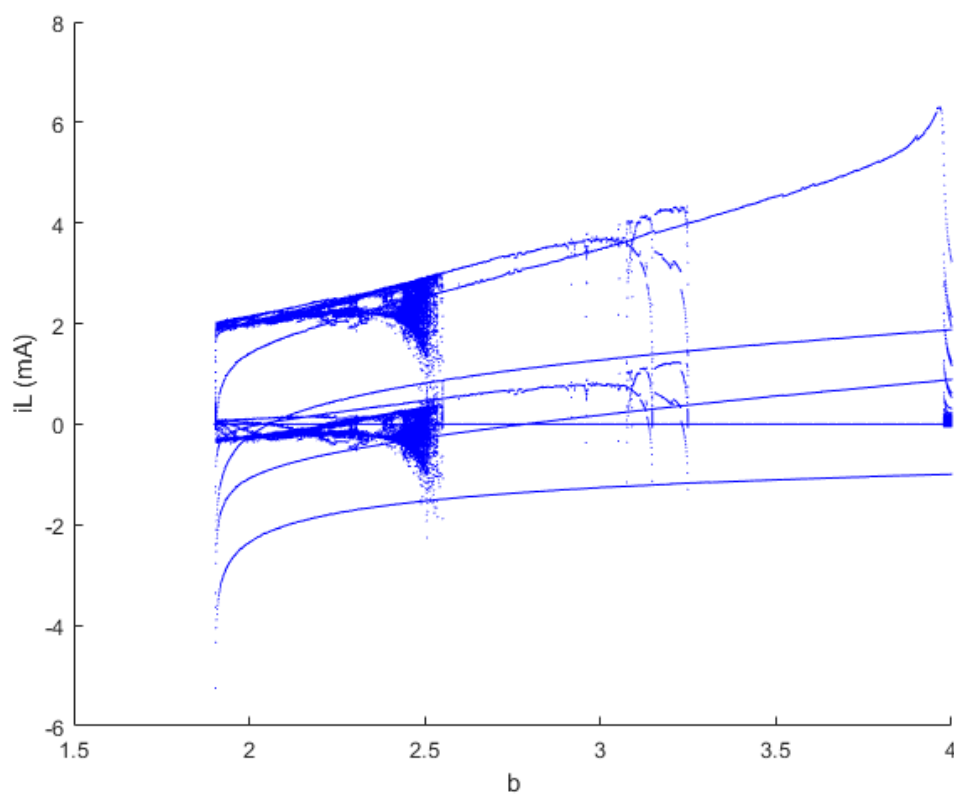
Obrázek 37 - Bifurkační diagram případu č. 1 s konstantním parametrem $d = -1,9$



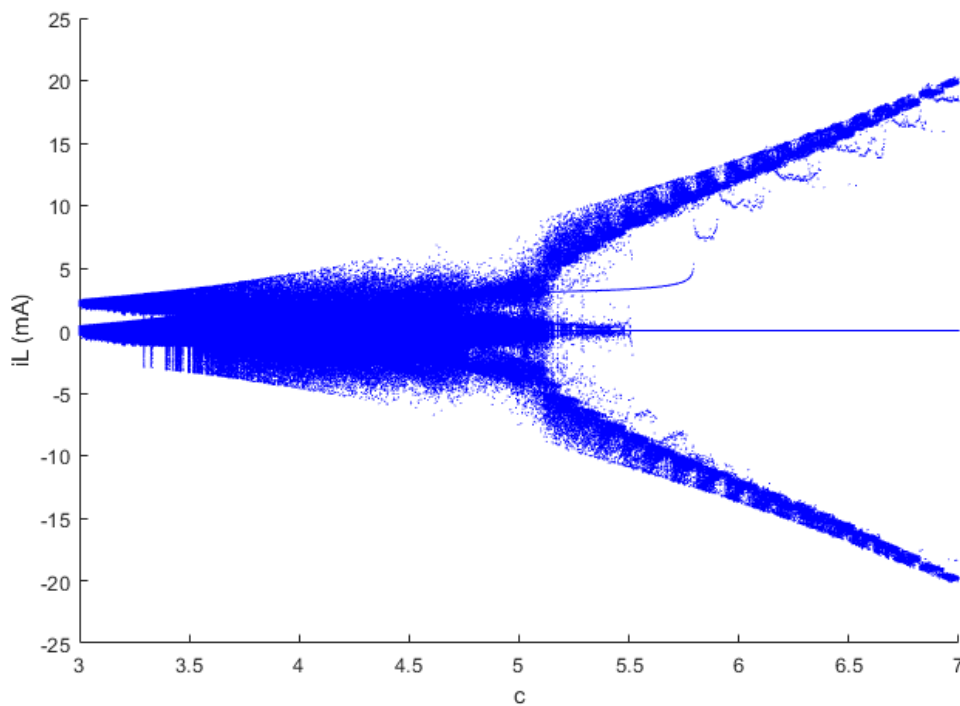
Obrázek 38 - Bifurkační diagram případu č. 2 s konstantním parametrem $e = -3,34$



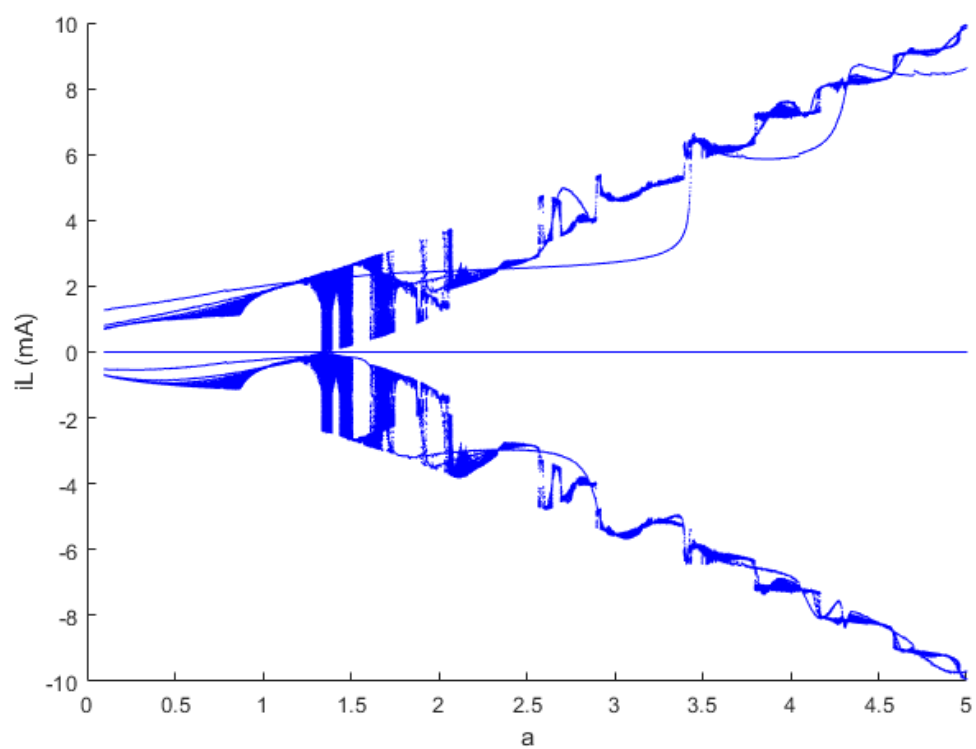
Obrázek 39 - Bifurkační diagram případu č. 3 s konstantním parametrem $c = -4,46$



Obrázek 40 - Bifurkační diagram případu č. 4 s konstatním parametrem $d = -1,51$



Obrázek 41 - Bifurkační diagram případu č. 5 s konstatním parametrem $e = -2,35$



Obrázek 42 - Bifurkační diagram případu č. 6 s konstatním parametrem $e = -0,66$

6. INTEGRÁTOROVÝ MODEL

Z poznatků z kapitoly 5.1 a na základě znalostí tvaru diferenciálních rovnic s polynomiálním vyjádřením admitančních parametrů lze konstruovat reálný obvod, který za pomoci funkčních bloků s operačními zesilovači modeluje chování tranzistorového stupně. Realizace jednotlivých DR spočívá v použití integrátorů, jejichž proud je opět vyjádřen pomocí Kirchhoffových zákonů jako součet dílčích proudů a napětí vystupujících v rovnicích. Mocninné členy jednotlivých napětí jsou generovány analogovými násobičkami stejně jako v případě simulací. Rozdíl oproti simulaci je v úpravě třetí DR, která popisuje napětí na induktoru. Proud i_L , vystupující jako stavová proměnná, je těžko měřitelný. Pro reálnou aplikaci lze třetí DR realizovat pomocí zapojení s integrátorem, takže vektor stavových proměnných přechází pouze na hodnoty napětí a rovnice jsou reprezentací pouze proudového Kirchhoffova zákona. Poslední diferenciální rovnice má po úpravě tvar

$$\frac{du_3}{dt} = \frac{1}{RC} u_2 \quad (6.1)$$

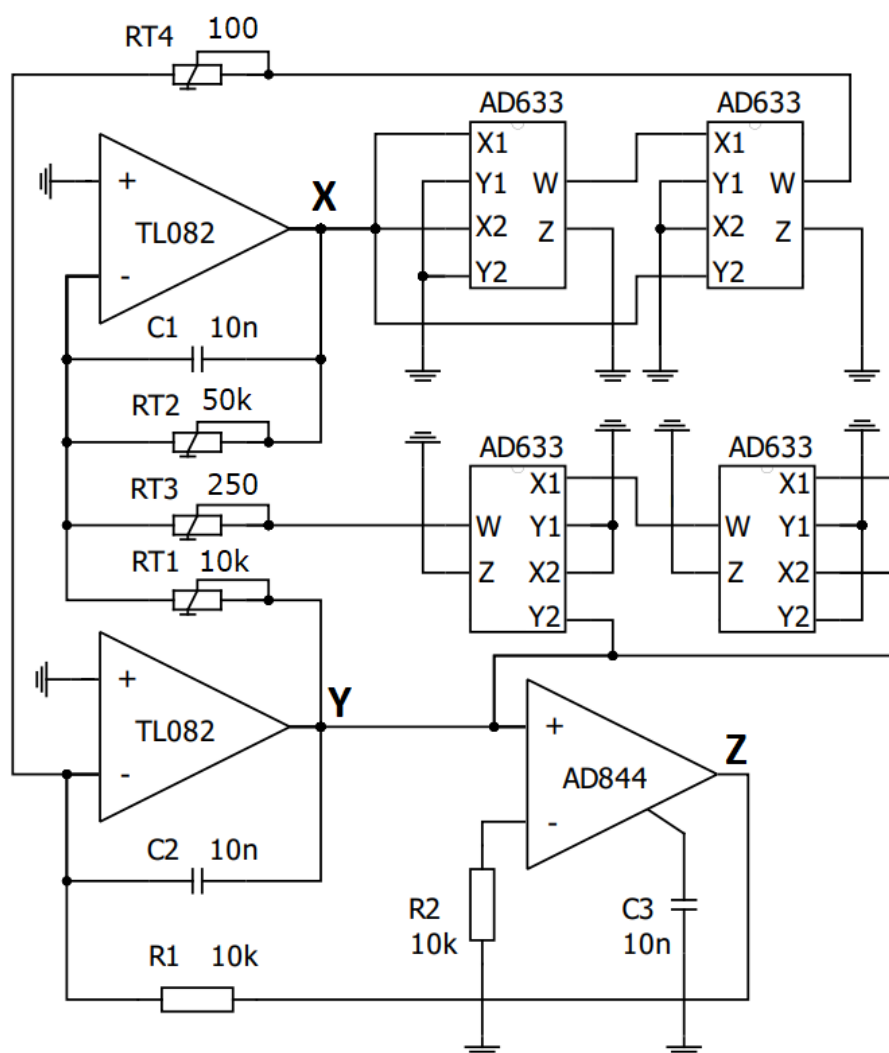
Realizované zapojení z obr. 43 je svým popisem podobné schématu z kapitoly 5.1, změna nastává pouze u členu s admitančním parametrem y_{21} . Zapojení odpovídá situaci, kdy jsou obě přenosové vodivosti dány polynomem. Integrátory jsou tvořeny standardním zapojením s operačním zesilovačem TL082, poslední integrátor je tvořen zesilovačem AD844 a nelineární napěťové členy generují analogové násobičky AD633. Obvod lze pomocí soustavy DR s přihlédnutím k rovnici 5.8 popsat následovně:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{R_{T2}C_1}x - \frac{1}{R_{T1}C_1}y - \frac{K^2}{R_{T3}C_1}y^3 \quad (6.2)$$

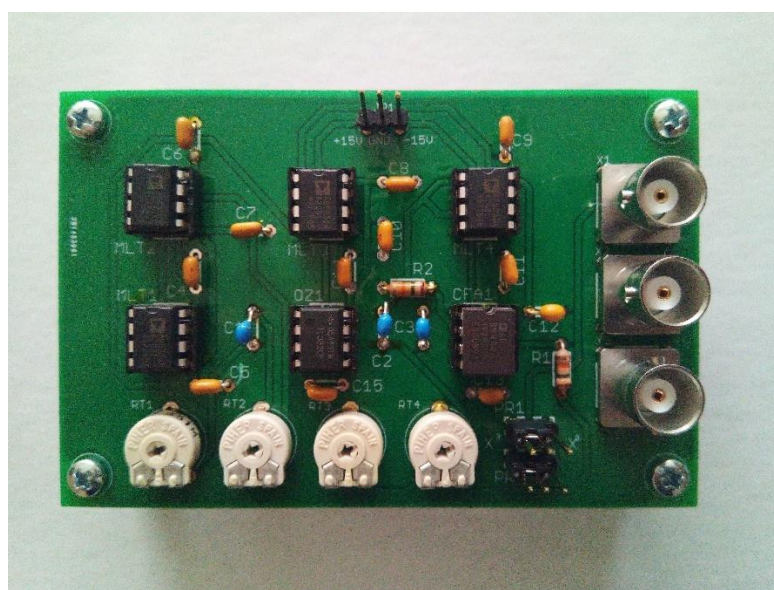
$$\frac{dy}{dt} = \pm \frac{K^2}{R_{T4}C_2}x^3 - \frac{1}{R_1C_2}z \quad (6.3)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{R_2C_3}y \quad (6.4)$$

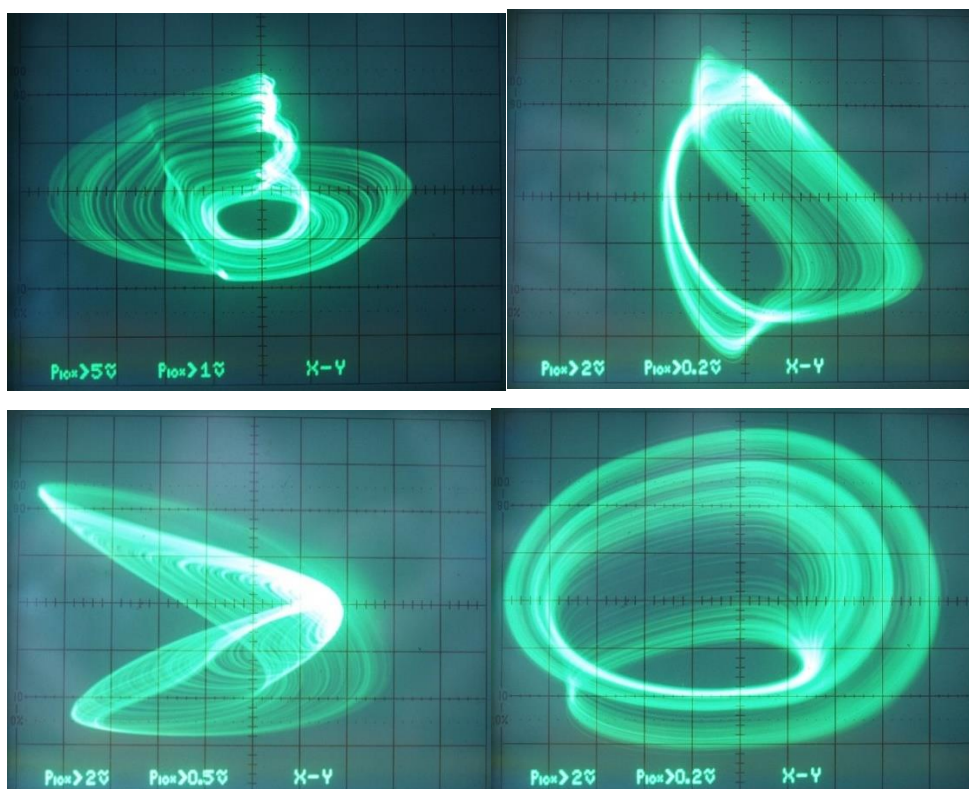
kde x , y , z jsou jednotlivé stavové proměnné reprezentující napětí na výstupech integrátorů, R_{T1-4} jsou hodnoty proměnných rezistorů, které simulují admitanční parametry, C_1 , C_2 , C_3 jsou kapacity jednotlivých integrátorů a K je interní konstanta analogové násobičky (pro obvod AD633 platí, že $K = 0,1$). Použití proměnných rezistorů umožňuje ladění obvodu do chaotického stavu, protože z důvodu parazitních vlastností všech součástek by obvod nemusel vykazovat chaos s přesnými hodnotami obvodových prvků. Realizované zapojení, jehož konstrukci je možné vidět na obr. 44, umožňuje přepnutí znaménka prvního členu v rovnici 4.10. Jednotlivá stavová napětí jsou vyvedena pomocí BNC konektoru pro snadnější měření atraktorů na osciloskopu. Jak je patrné z obr. 45, realizovaný obvod generuje podivné atraktory.



Obrázek 43 - Schéma integrátorového modelu tranzistorového zesilovače



Obrázek 44 - Integrátorový model zesilovače



Obrázek 45 - Měřené atraktory generované experimentálním obvodem

7. ZÁVĚR

Cílem této práce bylo především seznámení se s aktuálními poznatky v teorii chaosu aplikované na elektronické obvody. Možnosti numerické analýzy chaotických systémů byly ověřeny na dvou nejznámějších systémech vykazujících deterministický chaos – Lorenzově systému a Chuově obvodu. U Chuova obvodu byla navíc numericky analyzována méně používaná varianta používající kubickou funkci jako generující nelineární prvek, která korespondovala s výsledky uvedenými v [1]. Následná numerická analýza tranzistorového zesilovače potvrdila, že může existovat až 6 případů, při kterých může dojít v obvodu k chaotickému chování, přičemž generované atraktory vykazují rozdílnou strukturu pro každý z případů. Jednotlivá zapojení však ze skutečného tranzistorového zesilovače pouze vycházejí a jejich konečná topologie by v praxi nebyla využitelná pro zesilování.

Následná analýza Ljapunovovými exponenty ukázala, že pro různé konfigurace se oblasti s vyšší hodnotou exponentů mohou svou velikostí značně lišit. Pro případy č. 2 a 5 existuje velké množství parametrů, při kterých lze dosáhnout vyšších hodnot LLE, zatímco u případu č. 1 a 4 je oblast maximálního chaosu velmi malá. Grafická vyjádření LLE případů č. 1, 4 a 2, 5 mají podobnou charakteristiku z důvodu stejných definičních parametrů polynomiální aproximace admitančního parametru y_{12} , případy č. 3 a 6 vykazují podobnou pásovou strukturu i přes rozdílné definiční parametry. Z analýzy oblastí přitažlivosti je možné pozorovat souvislost mezi velikostí oblasti s vysokým LLE a množstvím počátečních podmínek, při kterých dojde ke vzniku podivného atraktoru. Analýza prostřednictvím bifurkačních diagramů ukázala, že i na tranzistorovém zesilovači lze pozorovat bifurkační jevy. Nejlépe pozorovatelný případ bifurkace lze vidět na obr. 38 pro případ č. 2. Rozsáhlá bifurkace taktéž probíhá u případu č. 5. Prototypová deska modelující diferenciální rovnice tranzistorového zesilovače na bázi integrátorů potvrdila přítomnost chaotického chování generováním podivného atraktoru. Z uvedených poznatků vyplývá, že pro existenci chaotického řešení je potřeba pouze jeden bipolární tranzistor s vhodnými admitančními parametry. Při použití vícestupňového zesilovače by v tomto případě mohlo dojít i k dalším chaotickým stavům.

Literatura

- [1] CHEN, G.; T. UETA, Chaos in circuits and systems: World scientific series on nonlinear science. Singapur: *World Scientific Publishing Co. Pte.*, 2002. ISBN 981-02-4933-0.
- [2] VAN WYK, M. A.; W. H. STEEB, Chaos in electronics. 1. Dordrecht, Nizozemsko: *Kluwer Academic Publishers*, 1997. ISBN 0-7923-4576-2.
- [3] TIŠNOVSKÝ, P. Nelineární dynamické systémy. Fakulta informatiky VUT v Brně [online]. 1999, 14. 11. 1999 [cit. 2020-10-23]. Dostupné z: <http://www.fit.vutbr.cz/~tisnovpa/fract/clanky/2.htm>
- [4] MARTÍNEK, P. Lorenzův atraktor [online]. Plzeň, 2009 [cit. 2020-10-25]. Dostupné z: <http://home.zcu.cz/~mikaMM/Galerie%20studentskych%20praci%20MM/2009/Martinek-Lorenz%C5%AFv%20atraktor.pdf>. Semestrální práce. Západočeská univerzita v Plzni.
- [5] SIDERSKIY, V. Chuacircuits.com [online]. [cit. 2020-11-01]. Dostupné z: <http://www.chuacircuits.com/>
- [6] SPROTT, J. C. Chaos and Time-Series Analysis. Chaos and Time-Series Analysis [online]. [cit. 2021-03-27]. Dostupné z: <http://sprott.physics.wisc.edu/chaostsa/>
- [7] ANGELIS, J. Chaotické chování máloparametrických modelů atmosféry. Praha, 2006. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra meteorologie a ochrany prostředí. Vedoucí práce Aleš Raidl.
- [8] RODRIGUEZ-VAZQUEZ, A.; J. HUERTAS, L. O. CHUA, Chaos in switched-capacitor circuit. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 1985, 32, 1083–1085.
- [9] HAMIL, D.C.; D. J. JEFFRIES, Subharmonics and chaos in a controlled switched-mode power converter. *IEEE Trans. Circuits Syst.* 1988, 35, 1059–1061.
- [10] ZHOU, X.; J. LI, M. YOUJIE, Chaos phenomena in DC-DC converter and chaos control. *Procedia Eng.* 2012, 29, 382 470–473.
- [11] ENDO, T.; L. O. CHUA, Chaos from phase-locked loops. *IEEE Trans. Circuits Syst.* 1988, 35, 987–1003.
- [12] KENNEDY, M.P. Chaos in the Colpitts oscillator. *IEEE Trans. Circuits Syst.* 1994, 41, 771–774.
- [13] KVARDA, P. Chaos in Hartley's oscillator. *Int. J. Bifurc. Chaos* 2011, 12, 2229–2232.
- [14] KILIC, R.; F. YILDRIM, A survey of Wien bridge-based chaotic oscillators: Design and experimental issues. *Chaos Solitons Fractals* 2008, 38, 1394–1410.
- [15] MATSUMOTO, T.; M. NISHI, Chaos, Synchronization and Bifurcations in a Driven R-L-Diode Circuit. *IUTAM Symposium on New Applications of Nonlinear*

- and Chaotic Dynamics in Mechanics. Kluwer Academic Publishers, 1997, 343-352.
- [16] CORRON, N.; J. BLAKELY, M. STAHL, A matched filter for chaos. *Chaos* (Woodbury, N.Y.), 2010, 10, DOI: 10.1063/1.3432557.
 - [17] LIN, T.; L. O. CHUA, "On chaos of digital filters in the real world," in *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 38, no. 5, pp. 557-558, May 1991, doi: 10.1109/31.76495.
 - [18] CAROLL, T. L. Detecting recursive and nonrecursive filters using chaos. *Chaos* (Woodbury, N.Y.), 2010, 9, DOI:10.1063/1.3357984
 - [19] PETRŽELA, J. On the existence of chaos in the electronically adjustable structures of state variable filters. *Int. J. Circuit Theory Appl.* 2016, 11, 605–653.
 - [20] BAO, B., P. WU, H. BAO, M. CHEN a X. QUAN, Chaotic bursting in memristive diode bridge coupled Sallen-Key low-pass filter. *Electronics letters*. 2017, 53. 0013-5194.
 - [21] PETRŽELA, J. Generalized single stage class C amplifier: analysis from the viewpoint of chaotic behavior. *Applied Sciences* 2020, 10, 5025.
 - [22] DEDIEU, H.; M. P. KENNEDY, M. HASLER, "Chaos shift keying: modulation and demodulation of a chaotic carrier using self-synchronizing Chua's circuits," in *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, vol. 40, no. 10, pp. 634-642, Oct. 1993, doi: 10.1109/82.246164.
 - [23] TEH, J. S.; M. ALAWIDA, Y. CH. SII, Implementation and practical problems of chaos-based cryptography revisited, *Journal of Information Security and Applications*, vol. 50, 2020, 2214-2126
 - [24] USAMA, M., Q. M. MALLUHI, N. ZAKARIA et al. An efficient secure data compression technique based on chaos and adaptive Huffman coding. Peer-to-Peer Netw. Appl. (2020). <https://doi.org/10.1007/s12083-020-00981-8>
 - [25] AIHARA, K. Chaos and Its Applications, *Procedia IUTAM*, vol. 5, 2012, 199-203, 2210-9838,
 - [26] PETRŽELA, J. Evidence of strange attractors in class C amplifier with single bipolar transistor: polynomial and piecewise-linear case, *Entropy*, 2021, 23, 175.
 - [27] LAMICH, T. Deterministický chaos v elektrických obvodech [online]. Olomouc, 2018 [cit. 2020-11-02]. Dostupné z: https://theses.cz/id/x3mzr9/bp_lamich.pdf. Bakalářská práce. Univerzita Palackého v Olomouci. Vedoucí práce Roman Kubínek.
 - [28] *Šablona pro BP/DP a prezentace v2.63* [online]. Brno: FEKT VUT, 2017 [cit. 2017-03-06]. Dostupné z: <http://latex.feec.vutbr.cz/sablona/>